

محاسبه ترازهای انرژی هسته  $^{168}\text{Er}$  با استفاده از دو پتانسیل درجه دو و درجه چهار

شعاعی

INC29-1300

نیوشا جنت دوست<sup>۱\*</sup>، هادی صبری<sup>۱</sup>

۱. دانشکده فیزیک، دانشگاه تبریز، تبریز- ایران

چکیده:

در این مقاله توانایی مدل بوهر-ماتلسون برای توصیف ترازهای انرژی هسته  $^{168}\text{Er}$  با فرض پتانسیل‌های مختلف سنجیده شده است. برای این هدف، وابستگی زاویه ای در مدل مورد استفاده، با استفاده از تغییر متغیرهای صورت گرفته در معادله شعاعی وارد شده است و نتایج به صورت ترکیبی از چند جمله ای‌های بسل گزارش می‌شود. همچنین ثابت‌های رابطه انرژی در مقایسه با مقادیر تجربی و با استفاده از تکنیک برازش حداقل مربعات استخراج گردید. نتایج حاصل از این بررسی، دقت بالاتر پتانسیل درجه چهارم را در مقایسه با پتانسیل درجه دوم نشان داده و لذا ماهیت تغییر شکل یافته این هسته را تایید می‌نماید. همچنین دقت بیشتر پتانسیل درجه دوم در توصیف تراز با اسپین  $J = 3$ ، ضرورت استفاده از ترکیب پتانسیل‌های مختلف را در بررسی طیف چنین هسته‌هایی که بیرون لایه های بسته قرار دارند و از حالت کروی فاصله گرفته است و تغییر شکل یافته اند را نشان می‌دهد.

کلیدواژه‌ها: مدل بوهر-ماتلسون، پتانسیل درجه دو شعاعی، پتانسیل درجه چهار شعاعی

## Calculation of energy spectra of $^{168}\text{Er}$ by using two quadratic and biquadratic radial potentials

Niusha Jannatdoust<sup>1\*</sup>, Hadi Sabri<sup>1</sup>

Department of Physics, university of Tabriz, Tabriz, Iran

### Abstract:

In this article, the ability of the Bohr-Mottelson model to describe the energy levels of the  $^{168}\text{Er}$  nucleus has been measured by assuming different potentials. For this purpose, angular dependence has been introduced in the used model by changing the variables in the radial equation, and the results are reported as a combination of Bessel polynomials. Also, the constants of the energy relationship were compared with the experimental values and extracted using the least square fitting technique. The results of this investigation show the higher accuracy of the fourth-order potential compared to the second-order potential and therefore confirm the deformed nature of this nucleus. Also, the higher accuracy of the quadratic potential in describing the alignment with spin  $J = 3$  shows the necessity of using a combination of different potentials in examining the spectrum of such nuclei that are outside the closed layers and have moved away from the spherical state and have been deformed.

**Keywords:** Bohr-Mottelson model, quadratic radial potentials, biquadratic radial potential.

## ۱. مقدمه

مطالعات در راستای بررسی ترکیب تقارن‌های مختلف و بررسی تغییر شکل هسته از حالت کروی به هسته‌های تغییر شکل یافته بصورت گسترده‌ای توسعه یافته است، در سالهای اخیر وجود ضرورت استفاده از چند نوع پتانسیل با استفاده از مدل‌های هسته‌ای مختلف برای توصیف ویژگی‌های مشاهده شده ی تجربی هسته‌ها را توجیه می‌کند. مدل‌های مختلف مورد مطالعه مانند مدل اندرکنش بوزونی<sup>۲</sup> و مدل تجمعی<sup>۳</sup> و ... کمک اساسی در فهم رفتار سطوح انرژی برای هسته‌های تغییر شکل یافته<sup>۴</sup> با پتانسیل‌های مختلف کرده است [۱-۳] که وجود تقارن‌های مختلف برای اولین بار به وسیله ی مدل اندرکنش بوزونی مورد بحث قرار گرفته است. [۴]

جدا سازی هامیلتونین<sup>۵</sup> بوهر-ماتلسون<sup>۶</sup> [۵] به دو قسمت شعاعی و زاویه ای و استفاده از پتانسیل‌های مختلف اولین بار توسط بوناتسوس<sup>۷</sup> پیشنهاد شده است [۶]. بوناتسوس و تیم مربوطه اش مطالعات خود را بر روی هسته ی  $^{194}\text{Pt}$  که در محدوده جرمی  $\text{Hf-Hg}$  می‌باشد را انجام داده‌اند که پتانسیل‌های مختلف را با هم ترکیب کرده و نشان دادند که صرفاً یک پتانسیل به تنهایی توانایی توصیف ویژگی‌های تجربی هسته را ندارد. هسته مورد مطالعه ما  $^{168}\text{Er}$  می‌باشد. این هسته در مجاورت پوسته بسته با چند پروتون بیشتر از پوسته بسته پروتونی  $Z=64$  و چند نوترون بیشتر از پوسته بسته نوترونی  $N=82$  به دلیل داشتن ویژگی‌هایی که بیرون لایه بسته می‌باشد مستعد چنین مطالعاتی است. در این مقاله بعد از جداسازی هامیلتونین بوهر-ماتلسون به دو قسمت شعاعی و زاویه ای برای هسته مورد نظر قسمت زاویه ای با استفاده از تغییر متغیرهایی در بخش شعاعی قرار داده و از عدد کوانتمی تحت عنوان بی تعادلی<sup>۸</sup> [۷] استفاده شده است. نهایتاً ویژه مقادیر و هامیلتونین مورد نظر حاصل شده و توانمندی این مدل با استفاده از پتانسیل‌های مختلف ارزیابی شده است.

## 2. روش کار

هامیلتونین مدل بوهر- ماتلسون در حالت کلی بر اساس مختصات و گشتاور کلی در فضای تغییر شکل چهار قطبی که شامل جمله انرژی ارتعاشی و انرژی جنبشی دورانی و پتانسیل‌های متفاوت می‌باشد به صورت زیر می‌باشد.

$$H_B = T_{vib} + T_{rot} + V \quad (1)$$

تمام عبارت‌های بالا تابعی از متغیر شعاعی بتا<sup>۹</sup> و زاویه ای گاما<sup>۱۰</sup> می‌باشند. عبارت اول انرژی جنبشی می‌باشد که ارتعاش را با جهت ثابت در فضا نشان می‌دهد، عبارت دوم انرژی جنبشی چرخشی سطح هسته بدون تغییر شکل است، و عبارت سوم پتانسیل بازیابی پارامتر شکل است:

- 
- Mixing symmetry<sup>۱</sup>
  - Interacting Boson Model (IBM)<sup>۲</sup>
  - Collective model<sup>۳</sup>
  - Deformed Nucleus<sup>۴</sup>
  - Hamiltonian<sup>۵</sup>
  - Bohr – Mottelson<sup>۶</sup>
  - Bonatsos<sup>۷</sup>
  - Wobbling<sup>۸</sup>
  - Beta<sup>۹</sup>
  - Gama<sup>۱۰</sup>

$$T_{vib} = -\frac{\hbar^2}{2B_m} \left\{ \frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2} \frac{1}{\sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} \right\} \quad (2)$$

$$T_{rot} = -\frac{\hbar^2}{2B_m} \frac{1}{4\beta^2} \sum_{K=1}^3 \frac{\hat{Q}_K^2}{(\sin(\gamma - \frac{2\pi}{3}K))^2} \quad (3)$$

$B_m$  مولفه ی جرم،  $\hat{Q}_K$  ( $K = 1, 2, 3$ ) مولفه تکانه زاویه ای می‌باشند که  $L^2 = (\hat{Q}_1^2 + \hat{Q}_2^2 + \hat{Q}_3^2)$ . با توجه به ویژگی‌های ساختاری هسته انتخابی و تعریف بصورت هسته تخت مقدار کمیت زاویه ای متناظر با چاه پتانسیل  $\gamma = \pi/6$  در نظر گرفته شده است و چون جمله اندازه حرکت‌های مداری در  $\gamma = \pi/6$ ، دارای مقدار کمینه می‌باشد قسمت نهایی فرمول (۱) را به صورت زیر تغییر می‌کند.

$$H_B = \left[ \left( \frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2} \left( \frac{1}{\sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{1}{4} \sum_{K=1}^3 \frac{Q_K^2}{\sin^2(\gamma - \frac{2\pi k}{3})} \right) \right) \right] + V(\beta, \gamma) \quad (4)$$

که پتانسیل به دو بخش تفکیک می‌شود. یکی وابسته به پارامتر شعاعی و بخش دیگر وابسته به پارامتر زاویه ای خواهد بود  $u(\beta, \gamma) = u(\beta) + u(\gamma)$ . با توجه به این موضوع معادله شرودینگر به دو بخش قسمت می‌شود:

$$\left[ -\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{4\beta^2} (4L(L+1) - 3\alpha^2) + u(\beta) \right] \xi_{L,\alpha} = \epsilon_\beta \xi_{L,\alpha}(\beta) \quad (5)$$

$$\left[ -\frac{1}{\langle \beta^2 \rangle} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} + u(\gamma) \right] \eta(\gamma) = \epsilon_\gamma \eta(\gamma) \quad (6)$$

با تغییر متغیر  $\alpha = L - n_w$  معادله (۵) به صورت شکل زیر در می‌آید:

$$\left[ -\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{4\beta^2} (L(L+4) + 3n_w(2L - n_w)) + u(\beta) \right] \xi_{L,n_w} = \epsilon_\beta \xi_{L,n_w}(\beta) \quad (7)$$

که  $n_w$  عدد کوانتومی بی تعادلی که مقدار  $L = n_w, n_w + 2, n_w + 4 \dots$  و  $n_w = 0$  که برای تراز پایه<sup>۲</sup> مقدار  $n_w = 0$  قرار داده می‌شود. در ادامه و با جاگذاری دو نوع پتانسیل متفاوت و همچنین روش برازش اطلاعات تجربی جهت تعیین ثابت‌های رابطه (۷) طیف انرژی هسته انتخابی محاسبه خواهد شد.

### 3. نتایج

در این مقاله هسته  ${}^{168}_{68}Er$  را انتخاب کردیم این هسته قبلا توسط مدل‌ها و روش‌های دیگری مثل مدل بوزون اندرکنشی و همچنین روش تقارن‌های دینامیکی<sup>۳</sup> جزئی مورد بررسی قرار گرفته است [۸]. دقت محاسبات و نتایج حاصل مورد

<sup>۱</sup> Oblate  
<sup>۲</sup> Ground state  
<sup>۳</sup> Dynamic symmetries

قبول نبوده است. یکی از روش‌های قابل قبول برای توصیف مفهوم وجود همزیستی شکلی<sup>۱</sup> و ترکیب تقارن‌ها استفاده از مدل تجمعی بوهر-ماتلسون می‌باشد.

که انرژی کل برای هامیلتونین بوهر از روی جمع انرژی شعاعی به شکل کلی زیر به دست می‌آید:

$$E(s, n_w, L) = E_0 + A(J_s(v))^2 + B(Y_s(v))^2 \quad (۸)$$

مقادیر  $A$  و  $B$  و  $E_0$  را برای هسته‌ی مورد نظر از طریق برازش توسط برنامه‌ی متلب<sup>۲</sup> بدست می‌آوریم. از روی آنها مقادیر انرژی را محاسبه می‌کنیم و با مقادیر تجربی مقایسه خواهیم کرد که برای این منظور از برنامه‌های اوربجین<sup>۳</sup>، میپل<sup>۴</sup> و متلب استفاده شده است.

### 1.3 پتانسیل درجه ۲

با جایگذاری پتانسیل درجه ۲  $u(\beta) = \frac{1}{2}C\beta^2$  در معادله (۴) و حل معادله شرودینگر ویژه توابع به صورت تابع بسل حاصل شده که به صورت زیر می‌باشد:

$$\xi_{L,\alpha}(\beta) = \frac{C1BesselJ\left(\frac{\sqrt{9-3\alpha^2+4L(L+1)}}{2}, \frac{\sqrt{-2C\beta^2+4\epsilon_\beta\beta}}{2}\right)}{\beta^{3/2}} + \frac{C1BesselY\left(\frac{\sqrt{9-3\alpha^2+4L(L+1)}}{2}, \frac{\sqrt{-2C\beta^2+4\epsilon_\beta\beta}}{2}\right)}{\beta^{3/2}} \quad (۹)$$

با توجه به عددهای کوانتومی مشخص مقادیر  $A$  و  $B$  و  $E_0$  از روش برازش بصورت زیر حاصل می‌شوند:

$$A = ۶۱۰۹ \text{ keV} \quad B = -۵۳۳/۱ \text{ keV} \quad E_0 = ۱۷۰/۱۸ \text{ keV} \quad (۱۰)$$

با جایگذاری مقادیر به دست آمده در رابطه (۸) مقادیر انرژی به صورت زیر به دست می‌آید.

جدول (۱) : مقادیر انرژی برای هسته  ${}^{۶۸}_{۲۸}\text{Er}$  (همگی بر حسب keV)

ردیف	تراز	L	$n_w$	A	$E_{exp}$	$E_{th}$
۱	$0_1^+$	۰	۰	۰	۰	۰
۲	$2_1^+$	۲	۲	۰	۷۹/۸۰	۱۶۷/۳۷
۳	$4_1^+$	۴	۴	۰	۲۶۴/۰۸	۳۱۲/۱۳
۴	$6_1^+$	۶	۶	۰	۵۴۸/۷۴	۳۷۹/۶۳
۵	$2_2^+$	۲	۱	۱	۸۲۱/۱۶	۵۰۷/۷۳
۶	$3_1^+$	۳	۳	۰	۸۹۵/۷۹	۷۹۲/۹۸

<sup>۱</sup> Shape coexistence

<sup>۲</sup> MATLAB

<sup>۳</sup> Origin

<sup>۴</sup> Maple

با توجه به نتایج حاصل در جدول (۱) پتانسیل درجه ۲ تراز با اسپین  $J = 3$  را به خوبی توصیف نمود و لذا نشان‌گر این مطلب می‌باشد که این هسته از حالت کروی (پتانسیل متناظر با شکل متقارن) فاصله گرفته است که ضرورت استفاده از پتانسیل‌های دیگر را پیشنهاد می‌دهد به این دلیل پتانسیل درجه ۴ را بررسی می‌کنیم.

### 2.3 پتانسیل درجه ۴

با جایگذاری پتانسیل درجه ۴  $u(\beta) = \frac{1}{2}C\beta^4$  در معادله (۴) و حل معادله شرودینگر ویژه توابع به صورت تابع بسل حاصل شده که به صورت زیر می‌باشد:

$$\xi_{L,\alpha}(\beta) = \frac{C1Bessely\left(\frac{\sqrt{9-3\alpha^2+4L(L+1)}}{2}, \frac{\sqrt{-2C\beta^4+4\epsilon_\beta\beta}}{2}\right)}{\beta^{3/2}} + \frac{C1Bessely\left(\frac{\sqrt{9-3\alpha^2+4L(L+1)}}{2}, \frac{\sqrt{-2C\beta^4+4\epsilon_\beta\beta}}{2}\right)}{\beta^{3/2}} \quad (11)$$

با توجه به عددهای کوانتومی مشخص مقادیر  $A$  و  $B$  و  $E_0$  از روش برازش بصورت زیر حاصل می‌شوند:

$$A = 5415 \text{ keV} \quad B = 247/2 \text{ keV} \quad E_0 = 65/53 \text{ keV} \quad (12)$$

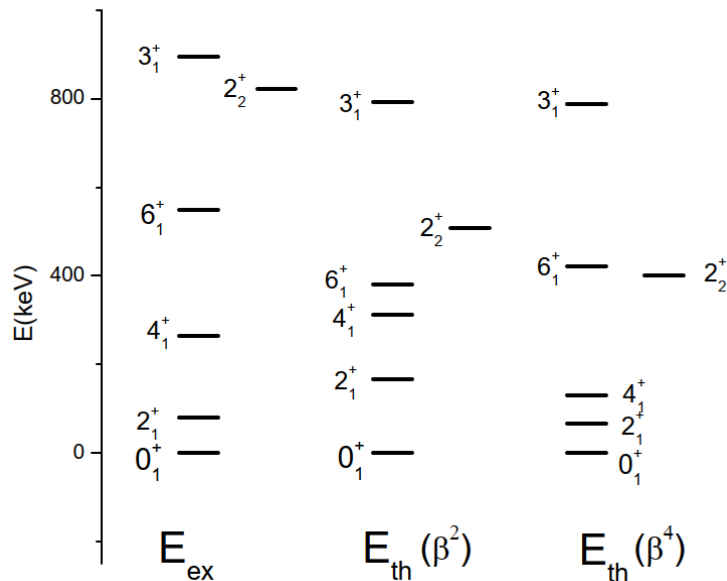
با جایگذاری مقادیر به دست آمده در رابطه (۸) مقادیر انرژی به صورت زیر به دست می‌آید.

جدول (۲) : مقادیر انرژی برای عنصر  ${}^{168}_{68}\text{Er}$  (همگی بر حسب keV)

ردیف	تراز	L	$n_w$	$\alpha$	$E_{exp}$	$E_{th}$
۱	$0_1^+$	۰	۰	۰	۰	۰
۲	$2_1^+$	۲	۲	۰	۷۹/۸۰	۶۵/۵۳
۳	$4_1^+$	۴	۴	۰	۲۶۴/۰۸	۱۲۸/۷۸
۴	$6_1^+$	۶	۶	۰	۵۴۸/۷۴	۴۲۲/۳۰
۵	$2_2^+$	۲	-۱	۳	۸۲۱/۱۶	۴۰۱/۳۹
۶	$3_1^+$	۳	۳	۰	۸۹۵/۷۹	۷۸۸/۴۱

مقایسه نتایج جدول ۱ و ۲ توانمندی بیشتر پتانسیل درجه ۴م را نشان داده و لذا وجود ساختار تغییر شکل یافته در این هسته را اثبات می‌نماید. این نتیجه توسط مدل‌های دیگر [۸] و ماهیت تغییر شکل یافته این هسته اثبات شده است.

نتایج دو پتانسیل به همراه مقادیر تجربی متناظر در شکل (۱) که با استفاده از برنامه اوربجین رسم شده، نمایش داده شده است.



شکل ۱ مقایسه نتایج تئوری دو پتانسیل درجه ۲ و ۴ و مقادیر تجربی متناظر.

#### 4. بحث و نتیجه گیری

در این مقاله، هسته تغییر شکل یافته  $^{168}\text{Er}$  در چارچوب مدل تجمعی بوهر - ماتلسون و با استفاده از دو نوع پتانسیل درجه دوم و چهارم شعاعی مورد مطالعه قرار گرفت. با جداسازی متغیر زاویه ای و تغییر متغیرهای صورت گرفته، محاسبات در قالب معادله شعاعی شرودینگر انجام شد. همچنین ثابت‌های انرژی در مقایسه با مقادیر تجربی برازش گردید. نتایج حاصل موفقیت مدل انتخابی و پتانسیل‌های پیشنهادی را در توصیف غیر تبهگن انرژی ترازهای باندهای پایه و براتگیخته نشان می‌دهد. پتانسیل درجه چهارم، تمام ترازهای انرژی باند پایه با اسپین زوج را بخوبی بازتولید می‌نماید. این نتیجه در انطباق با ماهیت تغییر شکل یافته هسته انتخابی می‌باشد که در قالب مدل‌های دیگر نیز پیشنهاد شده است. همچنین پتانسیل درجه چهارم دقت پیش بینی‌های نظری برای تراز  $J=3$  را افزایش می‌دهد. نتایج این مطالعه در خصوص ترکیب پتانسیل‌های مختلف را می‌توان برای بررسی سایر هسته‌ها در این مجوده جرمی مورد استفاده قرار داد.

#### 5. مراجع

- 1 Caprio, M. A., & Iachello, F. (2004). Phase structure of the two-fluid proton-neutron system. *Physical review letters*, 93(24), 242502.
- 2 Fossion, R., Bonatsos, D., & Lalazissis, G. A. (2006). E (5), X (5), and prolate to oblate shape phase transitions in relativistic Hartree-Bogoliubov theory. *Physical Review C*, 73(4), 044310.
- 3 Pan, F., Draayer, J. P., & Luo, Y. (2003). A close look at  $U(5) \leftrightarrow SU(3)$  transitional patterns in the interacting boson model. *Physics Letters B*, 576(3-4), 297-302.
- 4 Arima, A., and F. Iachello. "The Interacting Boson Model: Cambridge Monographs on Mathematical Physics." (1987).
- 5 Fortunato, L. (2005). Solutions of the Bohr Hamiltonian, a compendium. *The European Physical Journal A-Hadrons and Nuclei*, 26(1), 1-30.

- 6 Bonatsos, D., Lenis, D., Petrellis, D., & Terziev, P. A. (2004). Z (5): critical point symmetry for the prolate to oblate nuclear shape phase transition. *Physics Letters B*, 588(3-4), 172-179.
- 7 Hagemann, G. B. (2005). Triaxiality and wobbling. *Acta Physica Polonica B*, 36(4), 1043.
- 8 Fouladi, N., Fouladi, J., & Sabri, H. (2015). Investigation of low-lying energy spectra for deformed prolate nuclei via partial dynamical SU (3) symmetry. *The European Physical Journal Plus*, 130(6), 1-11.