

مطالعه ترازهای انرژی هسته‌ای در یک پتانسیل مرکزی برای $Cu^{57,61,67,69}$

INC29-1232

محمدرضا شجاعی*، نسربین ملکی نژاد

گروه فیزیک، دانشکده فیزیک و مهندسی هسته‌ای، دانشگاه صنعتی شاهرود، صندوق پستی ۳۶۱۹۹۹۵۱۶۱، شاهرود- ایران

چکیده:

نظریه ساختار هسته‌ای، برهمکنش بین پروتون‌ها و نوترون‌های درون هسته را مطالعه می‌کند. خواص هسته‌ای ایزوتوپ‌های مس در دهه‌های اخیر توجه زیادی را به خود جلب کرده است بررسی خواص استاتیکی هسته‌ها از پارامترهای مهم در فیزیک هسته‌ای محسوب می‌شود. در نتیجه برای ایزوتوپ‌های پایدار مس این خواص مورد بررسی قرار گرفته است در حالیکه برای ایزوتوپ‌های ناپایدار برخی از خواص استاتیکی ناشناخته هستند. هدف این مقاله محاسبه انرژی حالت پایه و برانگیخته برخی از ایزوتوپ‌های مس در یک سیستم دو ذره‌ای است که برهمکنش بین اجزا را به صورت ترکیبی از پتانسیل کولنی و یوکاوا در نظر گرفته‌ایم. بنابراین، از معادله شرودینگر با پتانسیل هلمن اصلاح شده برای یافتن بهترین ضرایب پتانسیل استفاده کردیم. هدف نهایی، مطالعه و بررسی نتایج نظری انرژی مس ($Cu^{57,61,67,69}$) و سپس مقایسه با نتایج تجربی و کارهای دیگر محققان است.

کلیدواژه‌ها: معادله شرودینگر، پتانسیل اصلاح شده هلمن، ایزوتوپ‌های مس، خواص استاتیکی

Study of nuclear levels of energy in a central potential for $Cu^{57,61,67,69}$

Mohammadreza Shojaei*, Nasrin Malekinezhad,

Department of Physics, Shahrood university of technology, P.O.BOX: 3619995161, Shahrood, Iran.

Abstract:

Nuclear structure theory talks about the interaction between the protons and the neutrons inside the nucleus. Copper isotopes' nuclear properties have attracted many attentions in recent decades. Statistical properties of nuclei are an important part of nuclear physics. As a result, for Cu isotopes static properties of the stable species are determined, while for unstable Cu isotopes some static properties are unknown. the purpose of this paper is to calculate a two-particle system which interact by a combination of the Coulomb and the Yukawa potential. So, Schrödinger equation with modified Hellmann potential is used to find the best potential coefficients. The ultimate goal is to study and investigate the theoretical results of the energy of $Cu^{57,61,67,69}$ and then compared with experimental or other results.

Keywords: Schrodinger equation, modified hellmann potential, Cu isotopes, Static properties.

۱. مقدمه

تحقیقات زیادی بر روی ایزوتوپ‌های مس انجام شده است. امروزه، این موضوع هنوز یک زمینه بسیار جدید برای مطالعه انرژی، شعاع باری و گشتاور چهار قطبی هسته‌ای با دقت بسیار بالا است [۱-۳]. اندازه‌گیری خواص ایزوتوپ‌ها، اطلاعاتی در مورد ساختار هسته‌ای فراهم می‌کند، که به ما این امکان را می‌دهد بتوانیم از تکنیک‌های مختلفی استفاده کنیم [۴-۷]. برای نوکلئون‌هایی که در لایه p قرار دارند، مانند ایزوتوپ‌های مس، محاسبات با استفاده از برهمکنش مؤثر چند ذره‌ای به دست آمده که از معادله شرودینگر با پتانسیل نوکلئون-نوکلئون استفاده شده است. در نظر گرفتن پتانسیل‌های نوکلئون-نوکلئون، که نشان دهنده داده‌های پراکندگی نوکلئون-نوکلئون و ویژگی‌های هسته است، اولین گام در بررسی مدل لایه‌ای از سطوح انرژی هسته‌ها است. پتانسیل نوکلئون-نوکلئون انواع مختلفی دارد [۸]. پتانسیل هلمن که توسط بسیاری از محققان مورد مطالعه قرار گرفته است، یکی از مهم‌ترین پتانسیل‌های کولنی و نمایی در فیزیک هسته‌ای و اتمی است [۹، ۱۰]. در این کار، ما پتانسیل هلمن اصلاح‌شده را انتخاب کردیم که متشکل از پتانسیل کولنی $(-\frac{a}{r})$ و

یوکاوا $(b \frac{e^{-ar}}{r^2})$ است. نقش دافعه کولنی در هسته‌های سبک (کمتر از ۴۰ نوکلئون) نسبتاً کوچک است و هسته‌های پایدارتر، تمایل دارند تعداد پروتون و نوترون مساوی داشته باشند. در این مقاله، پتانسیل پیشنهادی را به صورت زیر فرض می‌کنیم که شامل ضرایب a ، b ، c و α است و معمولاً با برازش با داده‌های تجربی تعیین می‌شوند.

$$V(r) = -\frac{a}{r} + b \frac{e^{-ar}}{r^2} + c \frac{e^{-4ar}}{r} \quad (1)$$

در این رابطه Γ نشان دهنده فاصله بین دو ذره است. α مربوط به محدوده پتانسیل، c پارامتر قابل تنظیم و a ، b به ترتیب قدرت پتانسیل کولنی و یوکاوا را نشان می‌دهد. a و α هر دو مقداری مثبت دارند درحالی‌که b می‌تواند مثبت یا منفی باشد. سال‌ها پیش، هلمن پیشگام مطالعه چنین پتانسیلی بود که در رابطه (۱) با مثبت معرفی شده است، و از آن زمان به بعد به طور گسترده در بسیاری از کارهای محاسباتی مورد استفاده قرار گرفته است [۱۱-۱۳]. برای سال‌های متمادی، توسط چندین نویسنده برای نشان دادن هسته الکترونی از آن استفاده شده است [۱۴، ۱۵]. داس و چاکروارتی، این پتانسیل را برای مطالعه مشکلات یونیزاسیون پوسته داخلی در فیزیک حالت جامد مناسب دانستند. [۱۶-۱۸]. نویسندگان متعددی از دیدگاه‌های نظری مختلف به این پتانسیل ابراز علاقه کرده‌اند. برهمکنش نوکلئون خارج از پوسته بسته با هسته نقش مهمی در نظریه ساختار هسته‌ای دارد. ما ایزوتوپ‌های مس را به عنوان یک سیستم دو ذره‌ای مورد بررسی قرار داده‌ایم. در این مدل می‌توان تأثیر متقابل خصوصیات جمعی و تک ذره‌ای را پیدا کرد که می‌تواند در چارچوب مدل لایه‌ای توصیف شود. معادله شرودینگر، راه‌حل‌های تحلیلی دقیقی را در این مورد ارائه نمی‌کند، از این رو برای بررسی چنین سیستم‌هایی ما از تکنیک‌های جبری مانند رویکردهای نیکیفارو-یووارو (NU^1) یا تعمیم یافته‌ی آن (PNU^2) برای محاسبه سیستم مورد مطالعه استفاده می‌کنیم، که یکی از روش‌های حل معادلات به صورت تحلیلی می‌باشد. این تکنیک جبری برای حل معادلات شرودینگر، دیراک، کلاین گوردون در حضور پتانسیل‌های مرکزی و غیرمرکزی به کار برده شده است. این روش، یک مدل ریاضی قدرتمند برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم ارائه می‌دهد. به کارگیری آن در حل معادله شرودینگر، دستورالعمل مشخصی برای به دست آوردن جواب‌های دقیق ویژه مقادیر انرژی حالت‌های مقید و ویژه توابع وابسته آن‌ها بر حسب چند جمله‌ای‌های متعامد ارائه می‌دهد که در عین سادگی، بسیار کارآمد است. در ادامه مروری بر این روش تحلیلی خواهیم داشت [۱۹-۲۲].

¹ Nikiforov-Uvarov

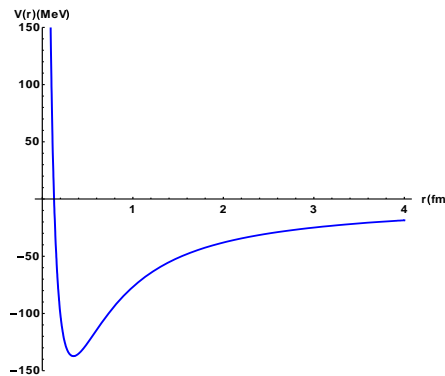
² Parametric Nikiforov-Uvarov

۲. روش کار

اولین قدم برای محاسبه انرژی بدست آوردن جواب تقریبی معادله شرودینگر چند ذره‌ای است. معادله شرودینگر شعاعی را می‌توان به شکل زیر نوشت [۲۳-۲۵]

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) + V(r) \right] R_{n,l}(r) = E_{n,l} R_{n,l}(r) \quad (2)$$

در این رابطه n و l به ترتیب نشان دهنده عدد کوانتومی شعاعی و زاویه‌ای هستند و $V(r)$ مطابق با معادله (۱) داده شده که رفتار این پتانسیل به عنوان نمونه برای ^{67}Cu با ضرایب پتانسیل مشخص در شکل ۱ نشان داده شده است.



شکل ۱. رفتار پتانسیل برای ^{67}Cu با مقادیر مشخص $a=74$, $b=-15$, $c=145.330$, $\alpha=0.985$

معادله شرودینگر شعاعی را می‌توان با جایگزین کردن معادله (۱) در (۲) به دست آورد.

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E + \frac{a}{r} - b \frac{\exp(-\alpha r)}{r^2} - c \frac{\exp(-4\alpha r)}{r} - \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{l(l+1)}{r^2} \right) R = 0 \quad (3)$$

معادلات نسبیتی K-G و دیراک در نسبیت و معادلات غیرنسبیتی شرودینگر در سیستم‌های غیرنسبیتی به عنوان روش‌های حیاتی برای مطالعه مولکول‌ها، اتم‌ها و هسته‌ها و همچنین رفتار طیفی و جنبشی آنها شناخته شده‌اند. بسیاری از محققان سعی کرده‌اند دقیق‌ترین راه‌حل را برای این معادلات نسبیتی و غیرنسبیتی برای پتانسیل‌های مختلف کشف کنند که ماهیت پیوند یا ارتعاش سیستم‌های کوانتومی را روشن می‌کند. با این حال، راه حل دقیق و عملی برای معادله شرودینگر برای پتانسیل‌های گوناگون وجود ندارد. بنابراین، استفاده از تکنیک‌های دیگر مانند ابرتقارن [۲۶، ۲۷]، روش NU [۱۹، ۲۱]، نظریه میدان کوانتومی و تابع گرین مؤثر خواهد بود.

با تحلیل و ساده‌سازی روابط (۳) می‌توان به معادله (۴) رسید:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \frac{1}{r^2} (-\varepsilon^2 r^2 - \beta r - \gamma) R = 0 \quad (4)$$

که پارامترهای ε ، β و γ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\frac{2\mu}{\hbar^2} E + \frac{2\mu}{\hbar^2} 4c\alpha = -\varepsilon^2, \quad \frac{2\mu}{\hbar^2} a + \frac{2\mu}{\hbar^2} b\alpha - \frac{2\mu}{\hbar^2} c = -\beta, \quad l(l+1) + \frac{2\mu}{\hbar^2} b = \gamma \quad (5)$$

از معادله بالا مشاهده می‌شود که نمی‌توان آن را به صورت تحلیلی حل کرد پس ناچار هستیم از روش جبری NU استفاده کنیم. در بخش بعد به طور خلاصه روش NU را توضیح می‌دهیم.

۱.۲. چارچوب کلی روش Nikiforov-Uvarov (NU)

این روش، یک مدل ریاضی قدرتمند برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم ارائه می‌دهد. برای یک پتانسیل معین، معادله شرودینگر به یک معادله تعمیم یافته از نوع ابر هندسی کاهش می‌یابد. در این روش معادلات دیفرانسیل را می‌توان به شکل زیر نوشت [۲۱، ۲۸]:

$$\psi_n''(s) + \frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)} \psi_n'(s) + \frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)} \psi_n(s) = 0 \quad (6)$$

که $\tilde{\tau}(s)$ یک چند جمله‌ای است که حداکثر می‌تواند درجه دوم باشد. $\tilde{\sigma}(s)$ و $\sigma(s)$ یک چند جمله‌ای درجه یک هستند. برای پیدا کردن یک راه حل خاص برای معادله (۶) با جداسازی متغیرها، داریم:

$$\psi(s) = \varphi(s)y(s) \quad (7)$$

در نتیجه معادله (۶) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\sigma(s)y''(s) + \tau(s)y'(s) + \lambda y(s) = 0 \quad (8)$$

که $\tau(s) = \tilde{\tau}(s) + 2\pi(s)$ و مشتق آن منفی است یعنی $\tilde{\tau}(s) < 0$. همچنین پارامترهای λ_n و λ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{cases} \lambda_n = -n\tau'(s) - \frac{n(n-1)}{2}\sigma''(s), & n=0,1,2,\dots \\ \lambda = k + \pi'(s) \end{cases} \quad (9)$$

با تساوی قرار دادن دو رابطه بالا می‌توان ویژه توابع انرژی را بدست آورد. با توجه به رابطه‌ی زیر می‌توان $\pi(s)$ را محاسبه نمود که در این رابطه باید k مربع چندجمله‌ای باشد.

$$\pi(s) = \frac{\sigma'(s) - \tilde{\tau}(s)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma'(s) - \tilde{\tau}(s)}{2}\right)^2 - \tilde{\sigma}(s) + k\sigma(s)} \quad (10)$$

تابع $\varphi(s)$ به عنوان یک مشتق لگاریتمی تعریف می‌شود

$$\frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} = \frac{\pi(s)}{\sigma(s)}$$

$y_n(s)$ تابعی ابر هندسی است که راه حل‌های چند جمله‌ای آن با رابطه رودریگز به دست می‌آید:

$$y_n(s) = \frac{B_n}{\rho_n} \frac{d^n}{ds^n} (\sigma^n(s)\rho(s)) \quad (12)$$

که B_n ضریب بهنجارش است و ρ چگالی وزنی به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$(\sigma\rho)' = \tau\rho \quad (13)$$

بنابراین، اگر روش NU را بر اساس مدل مورد بحث اعمال کنیم، با مقایسه معادلات (۴) و (۶) عبارات زیر به دست می‌آید.

$$\tilde{\tau} = 2, \quad \sigma = r, \quad \sigma^2 = r^2, \quad \tilde{\sigma} = -\varepsilon^2 r^2 - \beta r - \gamma \quad (14)$$

با کمی تحلیل و ساده‌سازی می‌توان معادله (۱۵) را با جایگزینی عبارت‌های فوق به معادله (۱۰) بدست آورد. با در نظر گرفتن شرایط روش NU برای $\pi(r)$ داریم:

$$\pi(r) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2\varepsilon r \pm \sqrt{1+4\gamma}) \quad (15)$$

از آنجایی که $\pi(r)$ باید چند جمله‌ای درجه یک و عبارت زیر رادیکال باید مربع چند جمله‌ای باشد. در نتیجه مقدار k به صورت زیر مشخص خواهد شد.

$$k = -\beta \pm \varepsilon\sqrt{1+4\gamma} \quad (16)$$

$\tau(r)$ یک چند جمله‌ای با مشتق منفی است، از این رو،

$$\tau(r) = -1 - (2\epsilon r \pm \sqrt{1 + 4\gamma}) \quad (17)$$

از تساوی قراردادن دو رابطه در معادله (۹)، ویژه مقادیر انرژی به صورت زیر به دست می‌آید.

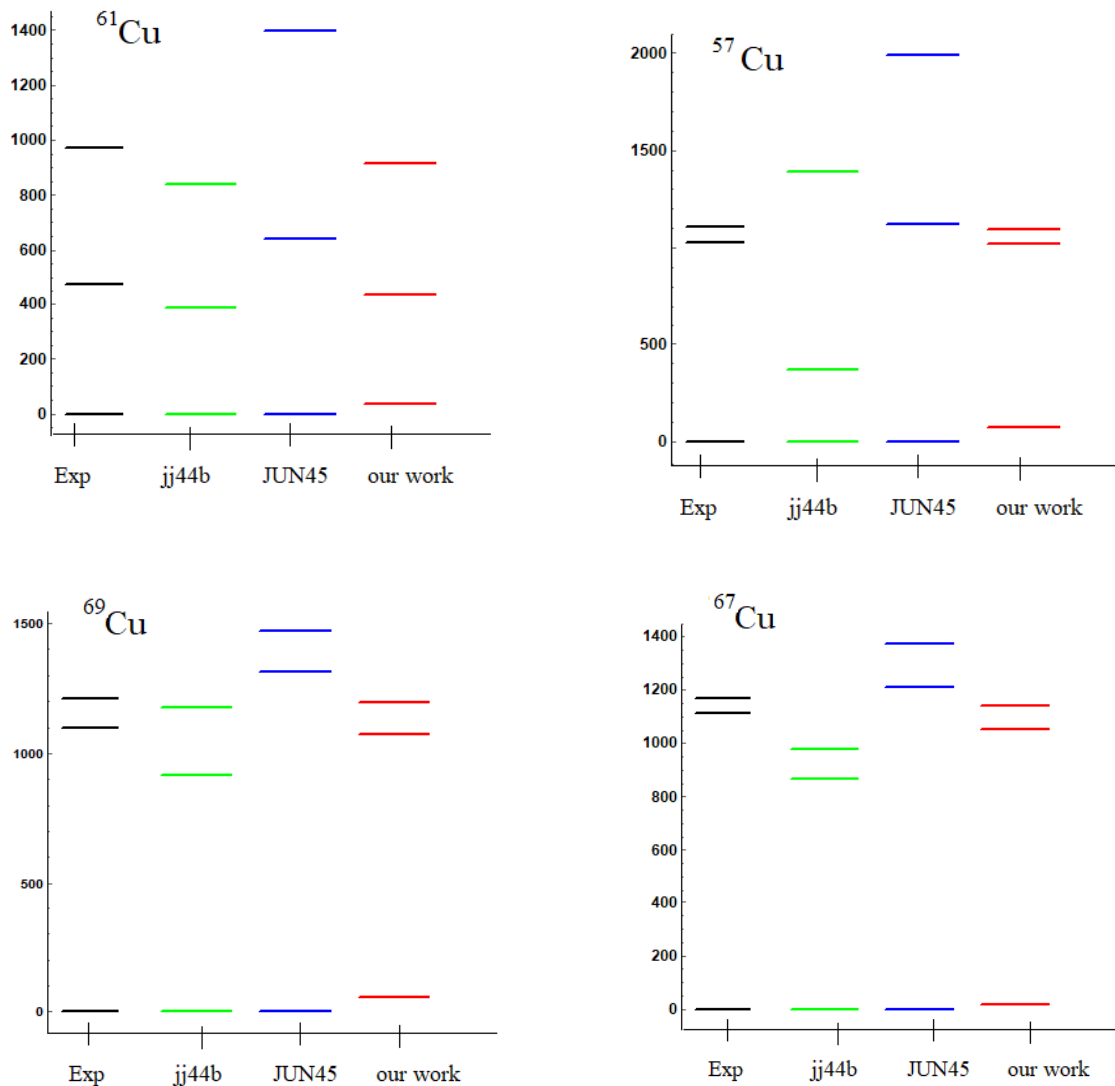
$$E_{n,l} = -4c\alpha - \left(\frac{2\mu}{\hbar^2}\right) \frac{(a + b\alpha - c)^2}{[(2n+1) \pm \sqrt{1 + 4(l(l+1) + \frac{2\mu}{\hbar^2} b)}]^2} \quad (18)$$

هدف اصلی این محاسبات، یافتن معادله انرژی $^{57,61,67,69}\text{Cu}$ برای حالت پایه و برخی از حالت‌های برانگیخته است. برای توصیف ایزوتوپ‌های مس، مدل لایه‌ای را برای پروتون خارج از پوسته بسته که در لایه‌ی $2p_{3/2}$ قرار دارد، انتخاب کرده‌ایم. در این مطالعه، ما یک سیستم غیرنسبیتی دو ذره‌ای با پتانسیل پیشنهادی مناسب برای برهمکنش نوکلئون اضافی و پوسته بسته در نظر می‌گیریم. با استفاده از رابطه (۱۸) می‌توانیم انرژی حالت پایه را محاسبه کنیم که نتایج آن در جدول ۱ نشان داده شده است.

جدول ۱. انرژی بستگی برای $^{57,61,67,69}\text{Cu}$

| انرژی [MeV] [۲۹] | | ضرایب پتانسیل | | | | ایزوتوپ |
|------------------|-----------|-------------------------------|---------------------------------|-------------------------------|--------------------------|------------------|
| E_{Exp} | E_{Cal} | $a(\text{MeV}\cdot\text{fm})$ | $b(\text{MeV}\cdot\text{fm}^2)$ | $c(\text{MeV}\cdot\text{fm})$ | $\alpha(\text{fm}^{-1})$ | |
| -۴۸۴/۶۹۴ | -۴۸۴/۶۲۶ | ۵۵ | -۸ | ۱۲۳/۶۱۹ | ۰/۹۶۱ | ^{57}Cu |
| -۵۳۱/۶۵۴ | -۵۳۱/۶۱۹ | ۶۰ | -۱۰ | ۱۳۴/۰۳۵ | ۰/۹۷۰ | ^{61}Cu |
| -۵۸۵/۴۱۷ | -۵۸۵/۴۰۱ | | | | | ^{67}Cu |
| | -۵۹۹/۹۲۲ | ۷۴ | -۱۵ | ۱۴۵/۳۳۰ | ۰/۹۸۵ | ^{69}Cu |
| | -۵۹۹/۹۷۹ | ۷۵ | -۱۶ | ۱۴۸/۱۶۰ | ۰/۹۸۹ | |

پارامترهای پتانسیل با برآزش حالت پایه و انرژی برانگیخته مس به دست آمده است. با داشتن ضرایب پتانسیل و انرژی حالت پایه به راحتی می‌توان انرژی ترازهای برانگیخته را بدست آورد، نتایج محاسبات در شکل ۲ نشان داده شده است. نتایج بدست آمده با مقادیر تجربی و همچنین کارهای دیگران (مرجع ۳۰ و ۳۱) مورد مقایسه قرار گرفته است، که برای ترازهای انرژی برانگیخته مطابقت خوبی با داده‌های تجربی دارد. همچنین می‌توان از نتایج عددی حاصل از انرژی ترازهای برانگیخته مشخص کرد که تفاوت بین انرژی‌های تجربی و محاسبه شده کمتر از سایرین است. باتوجه به نمودارها، می‌توان دریافت که مدل در نظر گرفته شده نسبت به مدل‌های دیگر مناسب‌تر است.



شکل ۲. نمودار ترازهای حالت پایه و برانگیخته برای ایزوتوپ‌های مس $^{57,61,67,69}\text{Cu}$ [۳۰، ۳۱].

تابع موج سیستم را می‌توان با جایگذاری معادلات (۱۱) و (۱۲) در معادله (۷) به صورت زیر بدست آورد.

$$\psi_{n,l}(r) = r^{-\frac{1}{2}(\pm\sqrt{l+4\gamma})} e^{-\varepsilon r} \frac{B_n}{r^{-(\pm\sqrt{l+4\gamma})} e^{-2\varepsilon r}} \frac{d^n}{dr^n} (r^n e^{-2\varepsilon r} r^{-(\pm\sqrt{l+4\gamma})}) \quad (19)$$

۳. نتیجه گیری

برهمکنش موثر برای موفقیت مدل لایه‌های هسته‌ای ضروری است. ما می‌توانیم به‌طور دقیق و روشمند خواص هسته‌ای مختلف را هنگامی که یک برهمکنش کشف شد، توصیف کنیم، که به درک ما از ساختار لایه‌ها و زیرلایه هاکمک می‌کند و به ما این امکان را می‌دهد تا برای خواص مشاهده نشده پیش‌بینی کنیم. در سیستم دو ذره‌ای که با در نظر گرفتن نوکلئون و هسته تشکیل شده‌است، بر اساس ویژگی‌های این هسته‌ها که پوسته‌های تقریباً بسته هستند، ما توانستیم توصیفی ارائه کنیم. علاوه بر این، نشان داده شد که تحلیل‌های غیرنسبیتی مبتنی بر معادله شرودینگر می‌توانند تطابق بهتری با داده‌های تجربی ایجاد کنند. در این کار، ما انرژی ترازهای ایزوتوپ مس را به دست آورده‌ایم. از آنجایی که نتایج تئوری و تجربی مطابقت خوبی دارند، می‌توان نتیجه گرفت که پتانسیل هلمن اصلاح شده برای بیان پتانسیل مرکزی بین نوکلئون و هسته کاملاً مناسب است. تئوری حاضر امکان اندازه‌گیری خواص استاتیکی ایزوتوپ‌های مشابه را فراهم می‌کند.

۶. مراجع

- [1] N. Malekinezhad, M. R. Shojaei, *Int. J. Mod. Phys. E*, 31, 05, 2250044, (2022).
- [2] N. A. Smirnova, A. De Maesschalck, A. Van Dyck, K. Heyde, *Phys.Rev. C*69, 044306, (2004).
- [3] R. P. de Groot and et all, *Phys.Rev. C* 96, 041302(R) (2017).
- [4] M. R. Shojaei, A. A. Rajabi, M. Farrokh, and N. Zoghi-Foumani, *J. Mod. Phys.* 5, 773 (2014).
- [5] X. Zou, L. Z. Yi and C. S. Jia, *Physics Letters A*, 346, 54-64, (2005).
- [6] J. K. Bizhaem, N. Malekinezhad and M.R. Shojaei, *Jordan. Journal of Physics*, 14, 4, 333-338, (2021).
- [7] L. Z. Yi, Y. F. Diao, J. Y. Liu and C. S. Jia, *Physics Letters A*, 333, 212-217, (2004).
- [8] M. R. Shojaei and M. Mousavi, *Int. J. Phys. Sci.*, 10(9), 324-328, (2015).
- [9] H. Hellmann, *Acta Physicochim. URSS* 1 (1935) 913; 4 (1936) 225; 4 (1936) 324; *J. Chem. Phys.* 3 (1935) 61.
- [10] H. Hellmann and W. Kassatotchkin, *Acta Physicochim. URSS* 5 (1936) 23; *J. Chem. Phys.* 4 (1936) 324.
- [11] H. Hellmann, *Acta Physicochim. URSS* 1, 913 (1935); *ibid.* 4, 225 (1936); *ibid.* 4, 324 (1936).
- [12] H. Hellmann, *J. Chem. Phys.* 3, 61 (1935).
- [13] H. Hellmann and W. Kassatotchkin, *J. Chem. Phys.* 4, 324 (1936).
- [14] G. McGinn, *J. Chem. Phys.* 53, 3635 (1970).
- [15] J. Callaway and P. S. Laghos, *Phys. Rev.* 187, 192 (1969).
- [16] J. N. Das and S. Chakravarty, *Phys. Rev. A* 32, 176 (1985)
- [17] J. C. Philips and L. Kleinmann, *Phys. Rev. A* 116, 287 (1959); *ibid.* 118, 1153 (1960).
- [18] A. J. Hughes and J. Callaway, *Phys. Rev. A* 136, 1390 (1964).
- [19] A. I. Ahmadov, M. Demirci, S. M. Aslanova, M. F. Mustamin, *Physics Letters A*, 384, 126372, (2020).
- [20] A. I. Ahmadov, Sh.M. Nagiyev, M.V. Qocayeva, K. Uzun, V.A. Tarverdiyeva, *Int. J. Mod. Phys. A*, 33, 1850203 (2018).
- [21] A. F. Nikiforov, V. B. Uvarov "Special functions of mathematical physics", Springer, vol.205, (1988).
- [22] M. Farrokh, M. R. Shojaei, A. A. Rajabi, *Eur. Phys. J. Plus.* 128, 14 (2013).
- [23] M. R. Shojaei, N. Roshanbakht, *Pramana – J. Phys.* 87: 54, (2016).
- [24] U. A. Deta, A. Suparmi, and C. Cari, *Adv. Studies Theor. Phys.* 7, 647, (2013).
- [25] N. Zoghi-Foumani, M. R. Shojaei and A. A. Rajabi, *Pramana Journal of Phys.* 88, 68 (2017).
- [26] F. Cooper, A. Khare, and U. Sukhatme, *Supersymmetry in Quantum Mechanics* (World Scientific), (2001).
- [27] H. Feizi, A. A. Rajabi and M. R. Shojaei, *Acta Phys. Polon. B*, 42, 2143 (2011).
- [28] J. K. Bizhaem, N. Malekinezhad and M.R. Shojaei, *Jordan. Journal of Physics*, 14, 4, 333-338, (2021).
- [29] <http://cdfc.sinp.msu.ru/cgi-bin/gsearch.cgi?z=29>.
- [30] P. Vingerhoets and et. all, *Phys. Rev. C*, 82, 064311, (2010).
- [31] M. Honma, T. Otsuka, T. Mizusaki, and M. Hjorth-Jensen, *Phys. Rev. C*, 80, 064323 (2009).