

بررسی درهم‌تنیدگی کوانتومی در ساختار هسته زوج-زوج

INC29-1069

محمدعلی جعفری زاده^۱، نرجس امیری^{۲*}، مریم قپانوری^۳

۱. گروه نظری، دانشکده فیزیک، دانشگاه تبریز، تبریز-ایران

۲. گروه هسته‌ای، دانشکده فیزیک، دانشگاه تبریز، تبریز-ایران

۳. پژوهشکده فیزیک پلاسما و گداخت هسته‌ای، پژوهشگاه علوم و فنون هسته‌ای، سازمان انرژی اتمی، تهران-ایران

چکیده:

در این مقاله، انتقال فاز شکل کوانتومی بین کروی و تغییر شکل ناپایدار $U(5)$ - $O(6)$ هسته‌های زوج زوج در چارچوب مدل برهمکنش بوزونی، با استفاده از "آنتروپی درهم‌تنیدگی" مورد مطالعه قرار گرفته است. مشخص شد که آنتروپی درهم‌تنیدگی یک پارامتر نظم مناسب برای تشخیص انتقال فاز شکلی در سیستم‌های هسته‌ای است. مقادیر آنتروپی درهم‌تنیدگی ایزوتوپ‌های $^{102-110}Pd$ و $^{122-134}Xe$ محاسبه و تجزیه و تحلیل شد. نتایج نشان داد که هیچ درهم‌تنیدگی بین بوزون‌های s و d در حد $U(5)$ وجود ندارد و حداکثر مقدار درهم‌تنیدگی در حد $O(6)$ است.

کلیدواژه‌ها: گذر فاز کوانتومی، هسته زوج-زوج، درهم‌تنیدگی کوانتومی

Investigation of quantum entanglement in the structure of even-even nuclei

Mohammad ali Jafarizadeh¹, Narjes Amiri^{2*}, Maryam Ghapanvari³,

1. Theoretical Group, Faculty of Physics, Tabriz University., Tabriz, Iran.

2. Nuclear Group, Faculty of Physics, Tabriz University., Tabriz, Iran.

3. Institute of Plasma Physics and Nuclear Fusion, Research Institute for Nuclear Science and Technology, Atomic Energy Organization., Tehran, Iran.

Abstract:

In this manuscript, quantum shape phase transition between the spherical and deformed - unstable $U(5)$ - $O(6)$ even-even nuclei within the framework of Interacting Boson Model, using the "entanglement entropy" has been studied. It is found that entanglement entropy is a suitable order parameter to detect shape phase transition in nuclear systems. The entanglement entropy values of $^{102-110}Pd$ and $^{122-134}Xe$ isotopes were calculated and analyzed. The results showed that there is no entanglement between s and d bosons in the limit of $U(5)$ and the maximum amount of entanglement is in the limit of $O(6)$.

Keywords: quantum phase transition, even-even nuclei, quantum entanglement.



۱. مقدمه

یکی از مسائل اساسی علم اطلاعات کوانتومی، درهم تنیدگی کوانتومی است. درهم تنیدگی کوانتومی یک پدیده فیزیکی است که زمانی اتفاق می‌افتد که گروهی از ذرات ایجاد می‌شوند، برهمکنش می‌کنند یا مجاورت فضایی را به اشتراک می‌گذارند به گونه‌ای که حالت کوانتومی هر ذره از گروه را نمی‌توان مستقل از حالت ذرات دیگر توصیف کرد، از جمله زمانی که ذرات با فاصله زیادی از هم جدا می‌شوند. چنین پدیده‌ای موضوع مطالعه آلبرت اینشتین، بوریس پودولسکی و ناتان روزن در سال ۱۹۳۵ بود [۱]. حالت‌های درهم‌تنیده کوانتومی نقش کلیدی در فرآیندهای اطلاعات کوانتومی مانند انتقال از راه دور کوانتومی [۲]، رمزنگاری کوانتومی [۳] و محاسبات کوانتومی [۴] دارند. درهم تنیدگی کوانتومی اساس نظریه اطلاعات کوانتومی و منبع اولیه کوانتوم است. اخیراً، نظریه اطلاعات کوانتومی رویکرد جدیدی برای مشاهده و مطالعه سیستم‌های هسته‌ای درهم‌تنیده، مانند هسته‌ها، که سیستم‌های چند ذره‌ای در نظر گرفته می‌شوند، ارائه می‌کند [۵]. استفاده از اطلاعات کوانتومی در سیستم‌های هسته‌ای فرصت‌های جالب جدیدی را برای درک و تفسیر پدیده‌های برهمکنش قوی فراهم می‌کند. فیزیک نقش زیادی در تمام کاربردهای مکانیک کوانتومی دارد. بنابراین، واضح است که مفاهیم و ابزار اطلاعات کوانتومی در حال ورود به عرصه موردعلاقه در فیزیک هسته‌ای هستند. در نتیجه، ضروری است که هم نظریه پردازان اطلاعات کوانتومی و هم گروه هسته‌ای به ویژگی‌های درهم تنیدگی نشان داده شده توسط سیستم‌ها و فرآیندهای هسته‌ای علاقه‌مند باشند. به عنوان مثال، درهم تنیدگی در سیستم‌های هسته‌ای و فرآیندهای هسته‌ای مانند شکافت و غیره در حال بررسی است [۶-۷]. انتقال فاز کوانتومی در سیستم‌های هسته‌ای در ارتباط با درهم تنیدگی، در گذشته مورد مطالعه قرار گرفته است [۸-۱۲]. برای مشخص کردن ویژگی‌های سیستم، باید یک پارامتر نظم را معرفی کرد. درهم تنیدگی به عنوان یکی از جالب‌ترین ویژگی‌های نظریه کوانتومی، می‌تواند به عنوان یک پارامتر نظم در سیستم‌های هسته‌ای در نظر گرفته شود. بنابراین، اندازه‌گیری آن برای انتقال فاز کوانتومی مهم است. یکی از بهترین اندازه‌گیری‌ها برای درهم تنیدگی کوانتومی در سیستم‌های فیزیکی، آنتروپی نویمان است [۸-۱۲]. در این مقاله، با توجه به اهمیت سیستم‌های هسته‌ای و موضوعات اطلاعات کوانتومی، درهم تنیدگی کوانتومی را مطالعه می‌کنیم. یکی از اهداف ما مطالعه انتقال فاز کوانتومی و ساختار هسته بر اساس درجه درهم تنیدگی است. با استفاده از اثر درهم تنیدگی، انتقال فاز کوانتومی را شناسایی و توصیف می‌کنیم و رفتار درهم تنیدگی را در نزدیکی نقاط بحرانی کوانتومی بررسی می‌کنیم.

برای بررسی انتقال فاز، ما راه‌حل‌های دقیق آنتروپی درهم تنیدگی را برای ناحیه انتقالی در IBM با استفاده از ساختار جبری دوگانه بر اساس جبر لی $SU(1, 1)$ ارزیابی می‌کنیم.

۲. چارچوب تئوری کار

به منظور روشن شدن بررسی آنتروپی درهم تنیدگی در سیستم‌های هسته‌ای، مدل‌های مورد استفاده در هسته‌های زوج باید بر اساس تکنیک جبری $SU(1, 1)$ معرفی شوند. دو زنجیره از زیر جبرهای $U(6)$ که شامل جبر تکانه زاویه‌ای $SO(3)$ است وجود دارند که عبارت‌اند از:

$$U(6) \supset \left\{ \begin{array}{l} U(5) \\ O(6) \end{array} \right\} \supset O(5) \supset O(3) \quad (1)$$

جبر لی متناظر با گروه $SU(1, 1)$ توسط اپراتورهای جفت‌شدگی ایجاد می‌شود. برای بسط مدل جبر جفت‌شدگی شبه اسپین $SU(1, 1)$ بوزون‌های s و d را تعریف می‌کنیم:

$$S_s^+ = (S_s^-)^\dagger = \frac{1}{2} s^\dagger$$

$$S^0 = \frac{1}{2} (s^\dagger s + s s^\dagger) = \frac{1}{2} n_s + \frac{1}{4} \quad (2)$$

$$S_d^+ = (S_d^-)^\dagger = \frac{1}{2} d^\dagger \cdot d^\dagger$$

$$S_d^0 = \frac{1}{2} (d_v^\dagger d_v + d_v d_v^\dagger) = \frac{1}{2} n_d + \frac{5}{4}$$

n_s و n_d عملگر عدد برای بوزون‌های اسکالر و برداری است. عملگرهای جبر بی‌نهایت بعدی $SU(1, 1)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S_n^\pm(sd) = C_s^{2n+1} S^\pm(s) + C_d^{2n+1} S^\pm(d) \quad (3)$$

$$S_n^0(sd) = C_s^{2n} S^0(s) + C_d^{2n} S^0(d) \quad (4)$$

که کمیات C_s و C_d پارامترهای حقیقی بوده و n مقادیر $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ را به خود می‌گیرد. برای محاسبه طیف انرژی و محاسبه انتقال، ویژه‌حالت $|l\omega\rangle$ که پایین‌ترین حالت جبر آفین است و شامل هیچ جفت بوزونی نیست را در نظر می‌گیریم.

$$|l\omega\rangle_{sd} = \left\langle \begin{matrix} N, k_s = \frac{1}{2}(v_s + \frac{1}{2}), \mu_s = \frac{1}{2}(n_s + \frac{1}{2}), \\ k_d = \frac{1}{2}(v_d + \frac{5}{2}), \mu_d = \frac{1}{2}(n_d + \frac{5}{2}), LM \end{matrix} \right\rangle \quad (5)$$

از این رو داریم:

$$S_n^0 |l\omega\rangle = \left\{ C_s^{2n} \frac{1}{2} (n_s + \frac{1}{2}) + C_d^{2n} \frac{1}{2} (n_d + \frac{5}{2}) \right\} |l\omega\rangle = \Lambda_n^0 |l\omega\rangle \quad (6)$$

با استفاده از مولدهای $SU(1, 1)$ می‌توانیم یک هامیلتون کلی IBM را برای توصیف منطقه انتقال بین $U(5)$ - $O(6)$ به دست آوریم:

$$H = g S_0^+ S_0^- + \alpha S_1^0 + \beta C_2(SO(5)) + \gamma C_2(SO(3)) \quad (7)$$

پارامترها مقادیر حقیقی هستند. این هامیلتونین به ازای $C_s = C_d$ تقارن دینامیکی $O(6)$ ، به ازای $C_d \neq 0$ و $C_s = 0$ برای توصیف حد تقارنی $U(5)$ و نهایتاً به ازای $C_s \neq C_d \neq 0$ برای مطالعه ناحیه انتقالی مورد استفاده قرار می‌گیرد. حال ویژه مقادیر هامیلتونین به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$E = h^k + \alpha \Lambda_1^0 + \beta v(v+3) + \gamma L(L+1) \quad (8)$$

پارامترهای α, β, γ مقادیر حقیقی هستند. همچنین عدد کوانتومی k با استفاده از رابطه $N = 2k + \nu_s + \nu$ به تعداد کل بوزون‌های سیستم مرتبط می‌شود. برای تعیین طیف انرژی هر هسته انتخابی در این ناحیه مطالعاتی باید مجموعه‌ای از معادلات غیرخطی بت-آنساتز با تعداد k مجهول حل گردد. برای تعیین ریشه‌های بت-آنساتز جهت تعیین ترازهای انرژی هسته مورد مطالعه با مقادیر ν_s و ν خاص، ابتدا با استفاده از مقادیر حاصل از برازش طیف انرژی به مقادیر تجربی قابل دسترس، مقدار کمیت‌ها تعیین شده و سپس معادله بالا به ازای حالت $i=1$ حل می‌شود. سپس با استفاده از برنامه‌های محاسباتی موجود از جمله Matlab سایر ریشه‌های این سیستم به‌طور کامل محاسبه می‌گردد. لازم به توضیح است که محاسبات مورد نظر به ازای مقادیر مختلف ثابت‌های حاصل از فرآیند برازش اطلاعات تجربی تا جایی تکرار می‌شود تا مقدار خطای محاسباتی که به صورت $\sigma = \left(\frac{1}{N_{total}} \sum_i |E_{exp}(i) - E_{cal}(i)|^2 \right)^{1/2}$ تعریف می‌شود به کمینه مقدار خود برسد.

N_{total} تعداد کل ترازهای انرژی است که در فرآیند استخراج وجود دارد. ما بهترین مجموعه‌ای از پارامترهای هامیلتون را از طریق داده‌های تجربی موجود استخراج کرده‌ایم. در ادامه، بر روی درهم تنیدگی در ناحیه انتقال تمرکز می‌کنیم و نحوه تعیین درهم تنیدگی آنتروپی در IBM را ارائه می‌دهیم. ما فقط آنتروپی فون نویمان را به‌عنوان معیاری مناسب برای درهم تنیدگی در نظر خواهیم گرفت. یکی از ساده‌ترین کمیت‌ها برای اندازه‌گیری درهم تنیدگی بین دو جسم، آنتروپی فون نویمان است. آنتروپی درهم تنیدگی را می‌توان با استفاده از مقادیر منفرد تجزیه اشمیت حالت نشان داد. هر حالت خالص دویبخشی را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد.

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{i=1}^m a_i |v_i\rangle_A \otimes |v_i\rangle_B \quad (9)$$

آنتروپی فون نویمن را می‌توان با استفاده از تجزیه اشمیت نوشت.

$$S_A = S_B = - \sum_{i=1}^m |a_i|^2 \log(|a_i|^2) \quad (10)$$

ما آنتروپی درهم تنیدگی بوزون s و بوزون d را محاسبه کردیم. به‌صورت زیر شروع می‌کنیم [۱۳]:

$$S_{x_i}^+ = \frac{c_s}{1 - c_s^2 x_i} S_s^+ + \frac{c_d}{1 - c_d^2 x_i} S_d^+ = \alpha_i S_s^+ + \beta_i S_d^+ \quad (11)$$

$$(S^+)^m |k, k\rangle = \sqrt{\frac{m! \Gamma(m+2k)}{\Gamma(2k)}} |k, k+m\rangle \quad (12)$$

می‌توان تابع موج قسمت بوزونی را به‌صورت تجزیه اشمیت نوشت:

$$|\psi\rangle_{v, L, M_L}^B = \sum_{l=0}^m b_{l, k_s, k_d} |k_s, k_s + l, L, M_L\rangle |k_d, k_d + (m-l), L, M_L\rangle \quad (13)$$

ما آنتروپی درهم تنیدگی را در مدل برهمکنش بوزون به‌صورت زیر به دست می‌آوریم:

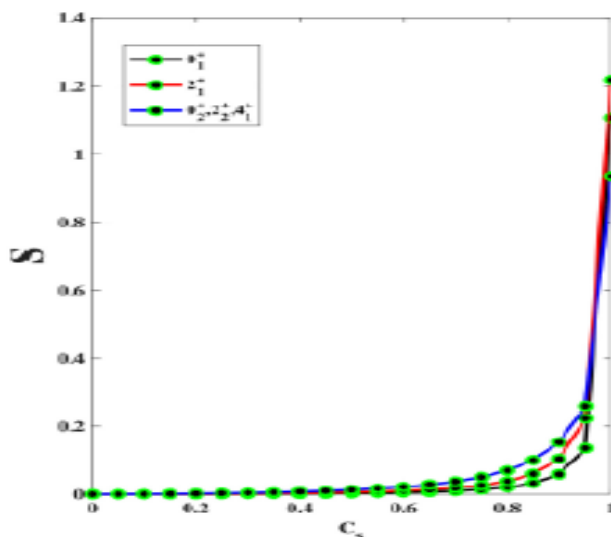
$$S^B = S_s = S_d = -\sum_{l=0}^m |b_{l,k_s,k_d}|^2 \log(|b_{l,k_s,k_d}|^2) \quad (14)$$

$$b_{l,k_s,k_d} = \frac{A_l \sqrt{\left(\frac{r! \Gamma(r+2k_s)}{\Gamma(2k_s)}\right) \times \left(\frac{(m-r)! \Gamma((m-r)+2k_d)}{\Gamma(2k_d)}\right)}}{\sqrt{\sum_{i=0}^m A_i \left(\frac{r! \Gamma(r+2k_s)}{\Gamma(2k_s)}\right) \times \left(\frac{(m-r)! \Gamma((m-r)+2k_d)}{\Gamma(2k_d)}\right)}} \quad (15)$$

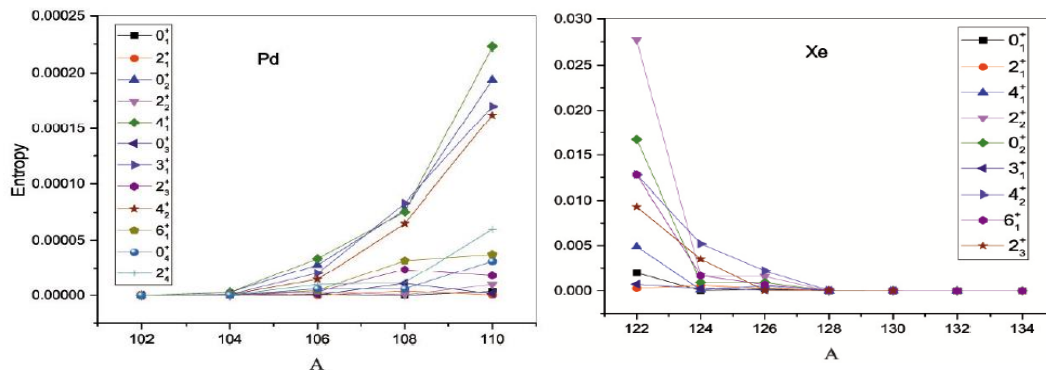
$$A_l = \frac{1}{l!(m-l)!} \sum_{\pi \in S_m} \alpha_{\pi(1)} \alpha_{\pi(2)} \dots \alpha_{\pi(l)} \beta_{\pi(l+1)} \dots \beta_{\pi(m)} \quad (16)$$

۳. نتایج

آنتروپی درهم تنیدگی برای بررسی تغییر شکل $U(5)$ کروی به $O(6)$ گاما ناپایدار در هسته‌های زوج و زوج اعمال می‌شود. شکل ۱ چگونگی تغییر آنتروپی درهم تنیدگی بوزون‌های s و d را به‌عنوان تابعی از پارامتر کنترلی C_s از یک حد تقارن دینامیکی $U(5)$ به دیگری $O(6)$ نشان می‌دهد. از شکل ۱ می‌توان دریافت که مقادیر آنتروپی درهم تنیدگی بوزون‌های s و d برای هر حالت در یک‌فاز برای $C_s < C_d$ ؛ بحرانی صفر است و برای $C_s > C_d$ شروع به بزرگ‌تر شدن می‌کند؛ آنتروپی درهم تنیدگی بحرانی به حداکثر خود می‌رسد. در $C_s = 1$ بنابراین در حد $U(5)$ درهم تنیدگی بین بوزون‌های s و d وجود ندارد و حداکثر درهم تنیدگی در حد $O(6)$ مشاهده می‌شود. شکل ۲ تغییرات آنتروپی ترازهای انرژی ایزوتوپ‌های pd و xe به‌عنوان تابعی از کنترل پارامتر C را نشان می‌دهد.



شکل ۱. تغییرات آنتروپی ترازهای انرژی به‌عنوان تابعی از کنترل پارامتر C



شکل 2. تغییرات آنتروپی ترازهای انرژی ایزوتوپ‌های Xe و Pd به‌عنوان تابعی از کنترل پارامتر C.

پارامتر کنترلی برای Pd با ۰.۱، ۰.۲۵، ۰.۳۸، ۰.۴۸ و ۰.۴۸ متناظر است. پارامتر کنترلی برای Xe با ۰.۸۹، ۰.۹۵، ۰.۸۳، ۰.۶۵، ۰.۴۶، ۰.۳۷، ۰.۰۶ و ۰.۰۶ متناظر است. از شکل ۲ می‌توان دید که مقادیر آنتروپی درهم تنیدگی بوزون‌های S و d برای ایزوتوپ‌های ارتعاشی صفر است و در ایزوتوپ‌های دیگر شروع به بزرگ‌تر شدن می‌کند

۴. نتیجه‌گیری

در این مقاله، ما در مورد چگونگی استفاده از آنتروپی برای تشخیص انتقال فاز کوانتومی بحث کردیم. ما آنتروپی درهم تنیدگی را در مدل برهمکنش بوزونی بررسی کردیم. یک تکنیک نظری برای ردیابی و مطالعه کمی انتقال فاز در هسته‌های زوج و فرد A ارائه شد. مشخص شد که آنتروپی درهم تنیدگی یک پارامتر نظم مناسب برای تشخیص انتقال فاز شکل در سیستم‌های هسته‌ای است. مقادیر آنتروپی درهم تنیدگی Pd و Xe محاسبه و تجزیه و تحلیل شد. نتایج نشان داد که هیچ درهم تنیدگی بین بوزون‌های S و d در حد U(5) وجود ندارد و حداکثر مقدار درهم تنیدگی در حد O(6) است.

5. مراجع

- [1] Einstein, A., Podolsky, B., & Rosen, N. (1935). Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Physical review*, 47(10), 777.
- [2] Bennett, C. H., Brassard, G., Crépeau, C., Jozsa, R., Peres, A., & Wootters, W. K. (1993). Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels. *Physical review letters*, 70(13), 1895.
- [3] Ekert, A. K. (1991). Quantum cryptography based on Bell's theorem. *Physical review letters*, 67(6), 661.
- [4] Ekert, A., & Jozsa, R. (1996). Quantum computation and Shor's factoring algorithm. *Reviews of Modern Physics*, 68(3), 733.
- [5] Pichler, T., Dalmonte, M., Rico, E., Zoller, P., & Montangero, S. (2016). Real-time dynamics in U(1) lattice gauge theories with tensor networks. *Physical Review X*, 6(1), 011023.
- [6] Cloet, I. C., Dietrich, M. R., Arrington, J., Bazavov, A., Bishof, M., Freese, A., ... & Zohar, E. (2019). Opportunities for nuclear physics & quantum information science. arXiv preprint arXiv:1903.05453.

- [7] Bender, M., Bernard, R., Bertsch, G., Chiba, S., Dobaczewski, J., Dubray, N., ... & _Aberg, S. (2020). Future of nuclear fission theory. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 47(11), 113002.
- [8] Chen, Y., Zanardi, P., Wang, Z. D., & Zhang, F. C. (2006). Sublattice entanglement and quantum phase transitions in antiferromagnetic spin chains. *New Journal of Physics*, 8(6), 97.
- [9] Gu, S. J., Tian, G. S., & Lin, H. Q. (2006). Local entanglement and quantum phase transition in spin models. *New Journal of Physics*, 8(4), 61.
- [10] Wu, L. A., Sarandy, M. S., & Lidar, D. A. (2004). Quantum phase transitions and bipartite entanglement. *Physical review letters*, 93(25), 250404.
- [11] Latorre, J. I., Rico, E., & Vidal, G. (2003). Ground state entanglement in quantum spin chains. arXiv preprint quantph/ 0304098.
- [12] Yang, M. F. (2005). Reexamination of entanglement and the quantum phase transition. *Physical Review A*, 71(3), 030302.
- [۱۳] Preskill, J. (2015). Lecture notes for ph219/cs219: Quantum information. Accesible via <http://www.theory.caltech.edu/people/preskill/ph229>.