

## بررسی تعادل مرز-ثابت در توکامک کرو

INC29-1052

مهسا معظمی قمصری<sup>\*۱</sup>، علی نوروزی آقباش<sup>۲</sup>، افشین ارژنگ مهر<sup>۳</sup>، فرزانه مرادی<sup>۴</sup>، سمیه پیری زادهجrandوست<sup>۲</sup>.

۱. گروه فیزیک هسته‌ای، دانشکده فیزیک، دانشگاه کاشان، صندوق پستی ۸۷۳۱۷۵۳۱۵۳، کاشان - ایران.
۲. شرکت فناوری‌های پیشرفته ایران، سازمان انرژی اتمی ایران، صندوق پستی ۱۹۸۳۹۶۳۱۱۳، تهران - ایران.
۳. گروه کاربرد پرتوها، مهندسی هسته‌ای، شهید بهشتی، صندوق پستی ۱۹۸۳۹۶۹۴۱۱، تهران - ایران.
۴. گروه مهندسی هسته‌ای، دانشکده فیزیک، دانشگاه اصفهان، صندوق پستی ۸۱۷۴۶۷۳۴۴۱، اصفهان - ایران.

## چکیده:

مطالعات انجام شده بیانگر آن است که توکامک‌های کرو دارای ویژگی‌های مطلوب یک نیروگاه همجوشی از جمله توانایی دستیابی به بتای بالا و ایجاد پایداری عمودی در پلاسما است. از طرفی، معادله‌ی گراد شفرانف یکی از موفق‌ترین ابزارهای توصیف تعادل پلاسمای توکامک (برای سیستم‌هایی با تقارن محوری) در چارچوب نظریه‌ی هیدرودینامیک مغناطیسی است. این معادله به صورت عددی و تحلیلی قابل حل می‌باشد. در این گزارش به منظور بررسی مسئله تعادل مرز ثابت از کد TASK استفاده شده است که به حل عددی معادله تعادل می پردازد. به منظور راستی آزمایی کد مذکور، ابتدا پارامترهای خروجی کد با داده‌های بدست آمده از کد SCENE مقایسه شد. در مرحله بعد تابع فشار و تابع جریان قطبی در سمت راست معادله‌ی گرادشفرانف به ازای پارامترهای پروفایل اولیه تنظیم گردید. در نهایت با تنظیم پارامترهای اصلی توکامک کرو هدف، نمایه‌های تعادلی پلاسما شامل سطوح شار قطبی و چگالی جریان پلاسما بدست آمد. **کلیدواژه‌ها:** تعادل توکامک، تعادل مرز-ثابت، معادله‌ی گراد-شفرانف، توکامک کرو، مدل مگنتوهیدرودینامیک.

## Fixed-boundary equilibrium in spherical tokamak

Mahsa Moazzemi Ghamsari<sup>\*1</sup>, Ali Norouzi Aghbash<sup>2</sup>, Afshin Arjangmehr<sup>3</sup>, Farzaneh Moradi Zamenjani<sup>4</sup>, Somayeh Pirizad Hejrandoost<sup>2</sup>

1. Department of Nuclear Physics, Faculty of Physics, University of Kashan, P.O.BOX:1983963113, Kashan, Iran.
2. Advanced Technology Cooperation of Iran, Atomic Energy Organization of Iran (AEOD), P.O.BOX:1983963113, Tehran, Iran.
3. Department of Radiation Application, Shahid Beheshti University G.C, P.O.BOX:1983969411, Tehran, Iran.
4. Department of Nuclear Engineering, Faculty of Physics, University of Isfahan, P.O.BOX: 8174673441, Isfahan, Iran.

## Abstract:

Studies have shown that Spherical tokamaks have desirable properties for a fusion power plant such as achieving high plasma  $\beta$  and having increased vertical stability. On the other hand, the Grad-Shafranov equation is one of the most successful tools for describing plasma equilibrium (for axisymmetric systems) in the framework of the magnetohydrodynamic theory. This equation can be solved numerically and analytically. In this paper, in order to study a fixed-boundary equilibrium in Spherical tokamak, the Task code was used. This code solves the equilibrium equation numerically. In order to verify the mentioned code, the output parameters of the code were first compared with the data obtained from the SCENE code. In the next step, pressure and current profiles on the right-hand side of Grad-shafranov equation were set for initial profile parameters. Finally, by adjusting the main parameters of the target spherical tokamak, the equilibrium plasma profiles including poloidal flux surface and plasma current density were obtained.

**Keywords:** tokamak equilibrium, fixed-boundary equilibrium, Grad-Shafranov equation, Spherical tokamak, Magnetohydrodynamic model.

## ۱. مقدمه

در بحث فیزیک توکامک، مسئله تعادل پلاسما یک عنصر اساسی و ضروری برای فهم و ارزیابی ویژگی‌های تعادلی اولیه و همچنین درک پدیده‌های مختلف پلاسما مانند ناپایداری‌های مگنتوهیدرودینامیک<sup>۱</sup>، ترابرد و آشفتگی پلاسما است [۱]. برای یک تعادل ایستا، معادلات (MHD) منجر به یک رابطه دیفرانسیلی مرتبه دوم غیر خطی می‌گردد که با معادله گراد-شفرانف شناخته می‌شود [۲ و ۳]. این معادله یکی از موفق‌ترین ابزارهای توصیف تعادل پلاسما توکامک در چارچوب نظریه‌ی هیدرودینامیک مغناطیسی است. برای حل این معادله روش‌های عددی و تحلیلی متفاوتی بکار گرفته می‌شود. معمولاً، تعادل‌هایی که به کمک حل تحلیلی معادله گراد-شفرانف قابل توصیف هستند، محدود بوده و لذا این معادله اغلب به صورت عددی حل می‌گردد.

در حل معادله گراد-شفرانف دو رویکرد تعادل مرز-آزاد و مرز-ثابت مورد بررسی قرار می‌گیرد [۳ و ۴]. در حلگرهای مرز-ثابت مقادیر شار در مرز ناحیه محاسباتی از قبل مشخص است. به بیان دیگر، در این تعادل مرز پلاسما و یا ناحیه پلاسما کاملاً مشخص می‌باشد. در این حالت میدان‌های تعادلی خارجی در نظر گرفته نمی‌شود و پروفایل‌های تعادل داخلی و توزیع شار مورد توجه خواهد بود. این در حالی است که حلگر مرز-آزاد، به حل تعادل با مرز نامشخصی از پلاسما مربوط بوده و لذا در این حالت علاوه بر پروفایل‌های تعادلی و توزیع شار، ضروری است موقعیت و شکل پلاسما بطور مشخص تعیین گردد. در این حالت سهم کویل‌های مغناطیسی خارجی و جریان پلاسما در تعیین مرز، در نظر گرفته می‌شوند.

تاکنون، فعالیت‌های گوناگونی در ارتباط با توسعه‌ی کدهای تعادلی در دنیا انجام گرفته‌است. از میان انواع کدهای تعادلی، کد TASK نرم افزاری با دسترسی آزاد است که توسط دانشگاه کیوتو ژاپن توسعه یافته‌است [۷-۵]. این کد دارای ماژول‌های محاسباتی گوناگونی است که هر یک به بررسی پدیده‌ها و فرایندهای فیزیکی ویژه‌ای شامل تعادل، ترابرد، انتشار موج و غیره اختصاص دارد. در این گزارش به منظور بررسی تعادل مرز-ثابت برای ساختار توکامک کروی، از کد TASK استفاده شده‌است. کد مذکور به حل معادله گراد-شفرانف در دو بعدی می‌پردازد.

مطالعات انجام شده در دهه‌های ۱۹۷۰ و ۱۹۸۰ بیانگر آن است که توکامک‌ها با نسبت منظر پایین  $A \sim 1/8$  (توکامک‌های کروی<sup>۲</sup>)، بتا پلاسمای بسیار بالایی در مقایسه با توکامک‌ها با نسبت منظر بالا (توکامک‌های مرسوم<sup>۳</sup>) ایجاد می‌کنند. بالا بودن بتا امکان ایجاد فشار پلاسما بالا و در نتیجه چگالی توان همجوشی بیشتر را فراهم می‌کند. علاوه بر این، در این توکامک‌ها ساختار کشیده ایجاد شده به دلیل نسبت منظر بالا، باعث پایداری و عملکرد بهتر پلاسما می‌شود [۱۰-۸].

از طرفی، ماشین‌های کروی در مقایسه با ماشین‌های مرسوم ارزان‌تر بوده و این امر توکامک‌های کروی را دستگاه‌هایی جذاب برای مطالعات فیزیک پلاسمای گداخت و چشمه‌های نوترون پراورزی ساخته‌است.

لازم بذکر است مسائل فیزیکی و مباحث مربوط به تعادل در توکامک‌های کروی نظیر توکامک‌های مرسوم بوده و تعادل پلاسما در این توکامک نیز با معادله گراد-شفرانف بیان می‌شود. در این گزارش به منظور بررسی تعادل مرز-ثابت برای ساختار توکامک کروی، از کد TASK استفاده شده‌است. کد مذکور به حل معادله گراد-شفرانف در دو بعدی می‌پردازد.

## ۲. مسئله تعادل مرز-ثابت

با فرض سیستم محوری متقارن، ساختار تعادلی پلاسما به طور کامل با یک معادله‌ی دیفرانسیل جزئی بیضوی غیر خطی تعریف می‌شود که معادله گراد-شفرانف نام دارد. این معادله در دستگاه مختصات استوانه‌ای  $(R, \varphi, Z)$  عبارت است

از [۱۱ و ۱۲]:

$$\frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial Z} \right) = -\mu_0 J_\phi = -\mu_0 R \frac{dp(\psi)}{d\psi} - \frac{\mu_0^2}{R} f(\psi) \frac{df(\psi)}{d\psi} \quad (1)$$

<sup>1</sup> Magnetohydrodynamic equilibrium (MHD)

<sup>2</sup> Spherical tokamak

<sup>3</sup> Conventional tokamak

که در آن  $J_\phi(\psi)$  چگالی جریان محوری کل در ناحیه پلاسما،  $f(\psi)$  و  $p(\psi)$  به ترتیب توابع جریان قطبی و فشار پلاسما بر حسب شار مغناطیسی قطبی هستند.

از آنجا که در تعادل مرز-ثابت، مرز پلاسما در محاسبات ثابت در نظر گرفته می‌شود لذا ضروری است شکل سطح پلاسما از قبل تعریف شود. تعریف شکل مرزی با استفاده از پارامترهای شعاع اصلی ( $R_0$ )، شعاع فرعی ( $a$ ) و همچنین پارامترهای شکل‌دهی پلاسما شامل پارامتر کشیدگی ( $\kappa$ )<sup>۴</sup> و پارامتر مثلثی گونه  $\delta$ <sup>۵</sup> تعیین می‌گردد. مطابق شکل ۱-الف شکل سطح پلاسما به صورت زیر داده می‌شود:

$$\begin{aligned} R(\theta_1) &= R_0 + a \cos(\theta_1 + \delta \sin \theta_1) \\ Z(\theta_1) &= \kappa a \sin \theta_1 \end{aligned} \quad (۲)$$

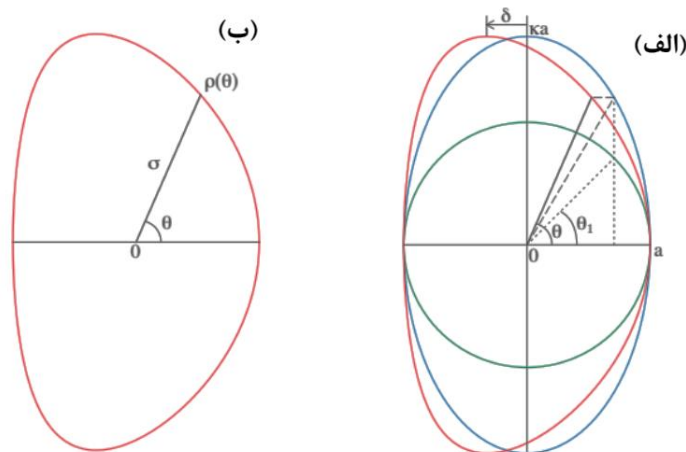
همچنین می‌توان شکل مرز پلاسما را به صورت تابعی از زاویه قطبی ( $\theta$ ) بیان کرد، به نحوی که:

$$\begin{aligned} \rho_a(\theta) &= a \sqrt{\cos^2(\theta_1 + \delta \sin \theta_1) + \kappa^2 \sin^2 \theta_1} \\ \tan \theta &= \frac{\kappa \sin \theta_1}{\cos(\theta_1 + \delta \sin \theta_1)} \end{aligned} \quad (۳)$$

برای حل معادله گراد-شفرانف در شرایط مرز-ثابت ابتدا لازم است متغیرهای قطبی ( $\theta$  و  $\sigma$ ) مطابق شکل ۱-ب تعریف شوند.

$$\begin{aligned} R &= R_0 + \rho_a(\theta) \sigma \cos \theta \\ Z &= \rho_a(\theta) \sigma \sin \theta \end{aligned} \quad (۴)$$

در عبارت فوق بازه‌ی تغییرات متغیر شعاعی بهنجار شده ( $\sigma$ ) و متغیر قطبی ( $\theta$ ) عبارت است از  $0 \leq \theta < 2\pi$  و  $0 \leq \sigma \leq 1$ .



شکل ۱: الف) پارامترهای تعریف کننده شکل و مرز پلاسما. ب) متغیرهای قطبی ( $\theta$  و  $\sigma$ )

معادله گراد-شفرانف برحسب متغیرهای قطبی مطابق رابطه **Error! Reference source not found.** بیان می‌شود:

<sup>4</sup> elongations

<sup>5</sup> triangularities

$$\frac{\partial}{\partial R} \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} + \frac{\partial}{\partial Z} \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial Z} \quad (۵)$$

$$= \frac{1}{\rho_a^2 \sigma} \left[ \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{\sigma}{R} + \frac{\rho_a'^2 \sigma}{R \rho_a'^2} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} - \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{\rho_a'}{R \rho_a} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\rho_a'}{R \rho_a} \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{R \sigma} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right] = -\mu_0 R \frac{dp(\psi)}{d\psi} - \frac{\mu_0^2}{R} f(\psi) \frac{df(\psi)}{d\psi}$$

مطابق رابطه‌ی فوق به ازای پروفایل فشار، تابع جریان قطبی و همچنین اعمال شرایط مرزی مناسب تابع  $\psi(R, Z)$  بدست می‌آید.

### ۳. روش کار

شرایط مرزی در نظر گرفته شده برای حل مسئله مرز-ثابت به این صورت است که مقدار شار در مرز پلاسما صفر  $\psi = 0$  و مقدار آن در محور مغناطیسی برابر با  $\psi = \psi_0$  می‌باشد. همچنین شار قطبی بهنجار شده عبارت است از:

$$\bar{\psi}_N = 1 - \psi/\psi_0 \quad (۶)$$

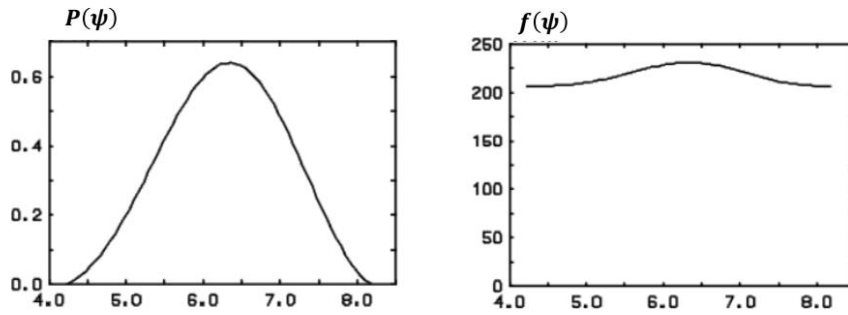
مطابق رابطه‌ی فوق شار قطبی بهنجار شده در محور مغناطیسی  $\psi_N = 0$  و در مرز پلاسما  $\psi_N = 1$  خواهد بود. برای حل رابطه (۵) نیازمند داشتن ضابطه‌ی توابع  $p$  و  $f$  نسبت به شار قطبی هستیم. عموماً ضابطه‌ی این توابع به طور کامل در دسترس نیست. اما فیزیک مسئله، آزمایشات و اندازه‌گیری‌ها، اطلاعات مفیدی درباره‌ی نحوه‌ی ارتباط این توابع نسبت به شار قطبی در اختیار قرار می‌دهند. برای تعریف سمت راست معادله‌ی گراد-شفرانف، پروفایل‌های در نظر گرفته شده برای توابع فشار و چگالی جریان به ترتیب مطابق روابط (۷) و (۸) می‌باشند. مقادیر پیش‌فرض مربوط به فشار و چگالی جریان اولیه به همراه پارامترهای پروفایل در جدول ۱ آورده شده‌است. نمودارهای مربوط به نمایه‌های مذکور برحسب شعاع اصلی در **Error! Reference source not found.** نمایش داده شده‌است.

$$P(\psi) = P_0(1 - \psi_N^{\text{PROFR0}})^{\text{PROFP0}} + P_1(1 - \psi_N^{\text{PROFR1}})^{\text{PROFP1}} + P_2(1 - (\psi_N)^{\text{PROFR2}})^{\text{PROFP2}} \quad (۷)$$

$$f(\psi) = B * R_0 + F_0(1 - \psi_N^{\text{PROFR0}})^{\text{PROFF0}} - F_1(1 - \psi_N^{\text{PROFR1}})^{\text{PROFF1}} - F_2(1 - (\psi_N)^{\text{PROFR2}})^{\text{PROFF2}} \quad (۸)$$

جدول ۱: پارامترهای پروفایل مربوط به توابع فشار و چگالی جریان.

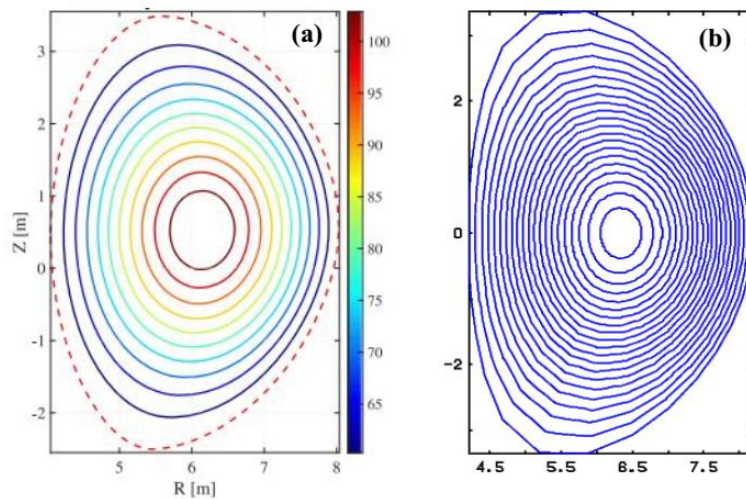
پارامتر	مقدار اولیه	پارامتر	مقدار اولیه
$P_0$	0.64	PROFP0	1.5
$P_1$	0	PROFP1	1.5
$P_2$	0	PROFP2	2
$F_0$	1	PROFF0	1.5
$F_1$	0	PROFF1	1.5
$F_2$	0	PROFF2	1.5
PROFR0	1	PROFR1	2
PROFR2	2		



شکل ۲: پروفایل‌های مربوط به توابع فشار و چگالی جریان

در این گزارش ابتدا ماژول تعادل مرز-ثابت به ازای ساختار محدودکننده برای توکامک مشابه ایتر مورد بررسی قرار گرفت. به منظور صحت‌سنجی نتایج بدست آمده، سطوح شار حاصل از کد TASK با داده‌های بدست آمده از حل تعادل مستقیم در حلگر تعادل مرز-ثابت کد SCENE [1] به‌ازای ساختار مشابه مقایسه گردید. برای مقایسه، سطوح شار تعادلی بدست آمده در شکل ۳ آورده شده‌است. محاسبه‌ی خطای نسبی به ازای چندین سطح شار انتخابی، نتایج بسیار قابل قبولی بین مقادیر شار در دو کد مذکور ارائه می‌دهد که بیانگر روند صحیح محاسبات در کد مورد استفاده در این پژوهش است.

Equilibrium  $\psi$  surface



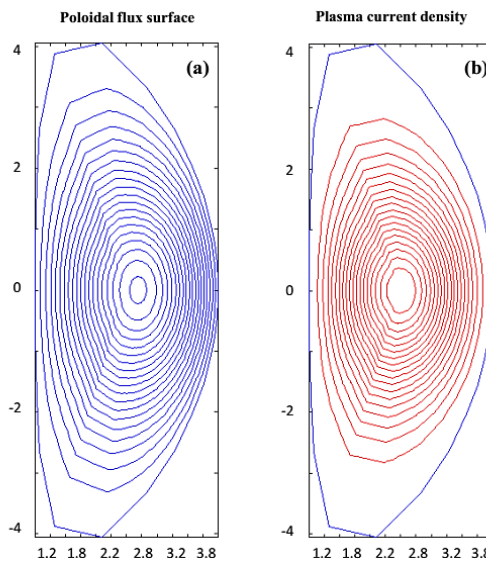
شکل ۳: سطوح شار تعادلی بدست آمده از (a) کد TASK و (b) حلگر تعادل مرز-ثابت SCENE [1]، برای ساختار محدودکننده در توکامک مشابه ایتر.

در مرحله بعد، به منظور بررسی ویژگی‌های تعادلی توکامک کروی، پارامترهای پلاسمای هدف مطابق جدول ۲ در نظر گرفته شد. روش حل عددی بکاررفته در این کد، روش تکرار نیوتن می‌باشد و در آن برای حل معادله گراد-شفرانف از ۳۲ مش شعاعی و ۳۲ مش قطبی استفاده شده‌است. در شکل ۴ نمایه‌ی سطوح شار قطبی به‌همراه چگالی جریان

پلازما آورده شده است. مقادیر بیشینه و کمینه‌ی مربوط به نمایه‌های فوق به همراه فاصله بین خطوط در جدول ۳ قابل مشاهده می‌باشد.

جدول ۲: مشخصات اصلی توکامک کروی هدف

پارامتر اصلی	
Aspect ratio = 1.65	Plasma minor radius = 1.5m
Plasma major radius = 2.5m	Magnetic field = 7.52
Plasma current = 21MA	Safety factor at center = 2.51
Elongation = 2.8	Triangularity = 0.55



شکل ۴: حل تعادل مرز-ثابت برای توکامک کروی بر حسب (a) سطوح شار قطبی و (b) چگالی جریان پلازما.

جدول ۳: مقادیر مربوط به خروجی‌های ماژول تعادل مرز-ثابت.

پارامتر	مقدار بیشینه	مقدار کمینه	فاصله بین خطوط
شار قطبی	-7.5453E-02	-4.8151E+01	2.5000E+00
چگالی جریان پلازما	4.7472E+06	5.2146E+02	2.5000E+05

#### ۴. نتیجه‌گیری

در این گزارش تعادل مرز-ثابت در توکامک کروی با حل معادله گراد-شفرانف مورد بررسی قرار گرفت. در این راستا، داده‌های تعادلی به کمک کد TASK استخراج گردید. در مرحله نخست، صحت‌سنجی کد مذکور به کمک داده‌های تعادلی بدست آمده از حلگر تعادل مرز-ثابت کد SCENE انجام گرفت. در ادامه پروفایل‌های فشار و تابع چگالی جریان به‌ازای پارامترهای پروفایل اولیه تنظیم شد. در نهایت، به‌ازای پارامترهای اصلی توکامک کروی هدف، نمایه‌های سطوح شار قطبی و چگالی جریان پلازما به دست آمد.

#### ۵. مراجع

- [1] Abate D, Bettini P. An inverse equilibrium tool to define axisymmetric plasma equilibria. *Plasma Physics and Controlled Fusion*. 2019 Sep 13; 61(10):105016.
- [2] Li H, Zhu P. Solving the Grad-Shafranov equation using spectral elements for tokamak equilibrium with toroidal rotation. *Computer Physics Communications*. 2021 Mar 1; 260:107264.
- [3] Jeon YM. Development of a free-boundary tokamak equilibrium solver for advanced study of tokamak equilibria. *Journal of the Korean Physical Society*. 2015 Sep; 67(5):843-53.
- [4] Ludwig GO. Analytical solution of the tokamak equilibrium. I. The fixed-boundary case. *Physics of Plasmas*. 2017 Sep 10; 24(9):092502.
- [5] <http://bpsl.nucleng.kyoto-u.ac.jp/>. User Manual of the TASK Code. (2021).
- [6] <http://bpsl.nucleng.kyoto-u.ac.jp/>. User Manual of the TASK/EQ Code. (2021).
- [7] Patel BS, Dickinson D, Roach CM, Wilson HR. Linear gyrokinetic stability of a high  $\beta$  non-inductive spherical tokamak. *Nuclear Fusion*. 2021 Dec 6; 62(1):016009.
- [8] A. Fukuyama . Modeling of Tokamak MHD Equilibrium, Lecture Series on Equilibrium and Transport in Tokamak Plasmas, Kyoto University, South Western Institute of Physics, Chengdu, China, 2020.
- [9] Sykes A, START Team, NBI Team, MAST Team. The spherical tokamak programme at Culham. *Nuclear Fusion*. 1999 Sep 1; 39(9Y):1271.
- [10] Tillack MS, Wang XR, Pulsifer J, Malang S, Sze DK, Billone M, Sviatoslavsky I, ARIES Team. Fusion power core engineering for the ARIES-ST power plant. *Fusion Engineering and Design*. 2003 Feb 1; 65(2):215-61.
- [11] Khayrutdinov RR, Lukash VE. Studies of plasma equilibrium and transport in a tokamak fusion device with the inverse-variable technique. *Journal of Computational Physics*. 1993 Dec 1; 109(2):193-201.
- [12] Aydemir AY, Park BH, Han KS. Exact Solov'ev equilibrium with an arbitrary boundary. *Physics of Plasmas*. 2019 Nov 4; 26(11):112503.