کاربرد روش های فوق تقارنی در محیط پخشی نوترون

***سیده نسرین حسینی مطلق[۱] ، شیلان صید محمدی[۲] ، سمانه عظیم عراقی[۳]، هاجر کاظمی فرد[٤]**

[۱]دانشکده فیزیک دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

[۲]دانشکده فیزیک دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

[۳]دانشکده فیزیک دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

[٤]دانشکده فیزیک دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

چکیده

ما در این مقاله پخش نوترون های حرارتی از یک چشمه خطی طویل را با استفاده از ساختارهای فوق تقارن Darboux-Witten *مورد مطالعه قرار می دهیم. اگرچه ساختار* Witten *فقط یک شماتیک ریاضی است، اما ساختار* Darboux *پارامتر آشنای طول پخش را بیان می کند، که از حل دقیق معادله پخش در حالت پایا به دست می آید. و تابع شار نوترونی می باشد. بنابراین در این مقاله با استفاده از روش* Darboux *، طول پخش موثر برای محیط های پخشی* H_2O, D_2O, Be, C*، تعیین می گردد.*

واژه های کلیدی: فوق تقارن ، طول پخش، نوترون، Darboux ، Witten

مقدمه

کوانتوم مکانیک فوق تقارن یک بعدی در سال ۱۹۸۱ میلادی توسط Witten به عنوان یک مدل ابزاری برای درک پدیده شکست–تقارن مورد بررسی قرار گرفت [1] و به سرعت به یک زمینه تحقیقاتی قدرتمند تبدیل شد [2]. در یک سری از مقالات نتایج جالبی برای حل مسائل فیزیکی مختلف با استفاده از اعمال روش فاکتورازسیون Witten بر روی معادله شرودینگر یک بعدی به دست آمده است. همچنین اخیرا روش کوانتوم مکانیک فوق تقارن ، به طور گسترده ای توسط Rosu ، بر اساس جواب عمومی معادله ریکاتی مورد مطالعه قرار گرفته است . روش عمومی Darboux دوگانه برای اولین بار توسط فیزیک دانی به نامMielink برای حالت کوانتومی نوسانگر استفاده شد . و در نهایت روش عمومی Darboux دوگانه منجر به معرفی پتانسیل های فرمیونی و بوزونی گردید [5-3]. هدف از این مقاله استفاده از این دو روش در تئوری پخش نوترون های حرارتی می باشد. مراحلی که در این مقاله معرفی میشوند عبارتند از : مرحله اول :معرفی معادله پخش نوترون های حرارتی ناشی از یک چشمه خطی طویل در حالت پایا در مختصات استوانه ای و محاسبه شار نوترونی . مرحله دوم : معرفی ساختار Witten . مرحله سوم : معرفی ساختار دو گانه Darboux . مرحله چهارم : تعیین طول پخش موثر برا ی محیط های پخشی H_2O, D_2O, Be, C . مرحله پنجم: جمع بندی صورت می گیرد .

روش کار

معادله پخش: معادله پخش برای نوترون ها در حالت کلی به صورت زیر می باشد:

* hosseinimotlagh@iust.ac.ir

$$D\nabla^2\phi - \sum_a \phi + S = 0 \qquad (1)$$

جمله اول معرف پخش نوترونی، جمله دوم معرف نوترون های جذب شده در محیط پخشی و S معرف قدرت چشمه نوترونی می باشد. و ثابت پخش D توسط رابطه : $D = \frac{\lambda_s}{3\left(1 - 2/3A\right)}$ داده می شود. که با میانگین پویش آزاد نوترون λ_s، ارتباط دارد. در این رابطه A عدد اتمی هسته پراکنده شده می باشد. و جمله $-2/3A$ در آن معرف پراکندگی غیر همگن در سیستم آزمایشگاهی است. Φ ارائه شده در معادله (1) معرف شار نوترونی می باشد که از حاصل ضرب چگالی نوترونی در سرعت متوسط نوترون به دست می آید. در نهایت $\sum_a$ معرف سطح مقطع جذب ماکروسکوپی می باشد. معمولا فرض می کنیم که جذب در مقایسه با پراکندگی بسیار کوچک است. همانطور که گفته شد چشمه نوترونی به صورت یک خط بار طویل نامحدود در نظر گرفته می شود که بر روی محور Z قرار گرفته است و در یک محیط پخشی به ابعاد بینهایت قرار دارد. و قدرت آن برابر با تعداد S_0 نوترون بر واحد طول بر واحد زمان می باشد. بنابراین $S = S_0\delta(\rho)$ ، که در آن $\delta(\rho)$ تابع دلتای دیراک در دستگاه مختصات استوانه ای است و در نقاط دور از چشمه، ($\rho \neq 0$)، $S = 0$ می باشد. به دلیل اینکه وابستگی به θ و Z وجود ندارد، قسمت شعاعی معادله پخش به صورت زیر است:

$$\rho^2 \frac{d^2\varphi}{d\varphi^2} + \rho \frac{d\varphi}{d\rho} - \rho^2 k^2 \phi = 0 \qquad (2)$$

که از رابطه فوق طول پخش را برابر با $k^{-1} = \sqrt{D/\sum_a}$ ، در نظر گرفته ایم. بنابراین جواب عمومی این معادله را می توان بر حسب توابع بسل تعمیم یافته $\phi = a_1 I_0(k\rho) + a_2 K_0(k\rho)$ نوشت. به دلیل اینکه ϕ بایستی در فواصل بسیار دور محدود باشد، جواب فیزیکی مسئله فقط شامل جمله K_0 می باشد. و برای تعیین ثابت a_2 لازم است که حاصل ضرب D در انتگرال منهای شار نوترونی در اطراف لبه قرص کوچکی به ارتفاع واحد مساوی با شدت تولید چشمه یعنی S_0، در داخل قرص باشد:

$$S_0 = \lim_{\rho \to 0} D a_2 \int \left[-\nabla K_0(k\rho).\ \rho_0 \right] \rho\ d\theta \qquad (3)$$

که با جایگذاری فرم سری $K_0(k\rho)$ در رابطه فوق خواهیم داشت:

$$S_0 = D a_2 \lim_{\rho \to 0} \frac{2\pi\rho}{\rho} \qquad (4)$$

یا

$$\phi = \frac{S_0}{2\pi D} K_0(k\rho) \qquad (5)$$

حال ساختارهای فوق تقارن را مورد مطالعه قرار می دهیم. لذا معادله (2) را با تغییر متغیر $\phi = \rho^{-1/2}\psi$ به فرم خود الحاقی زیر در می آوریم:

$$\psi'' - \left(k^2 - \frac{1}{4\rho^2} \right)\psi = 0 \qquad (6)$$

معادله فوق همان معادله آشنای شرودینگر با پتانسیل $V_B(\rho) = k^2 - \frac{1}{4\rho^2}$ می باشد و می تـوان از روش هـای فوق تقارن کوانتوم مکانیکی که در زیر می آید آن را حل نمود.

معرفی ساختار Witten

سـاختار Witten دارای دو مرحلـه زیـر اسـت: مرحلـه اول فاکتورازسـیون معادلـه (6) بـه کمـک عملگرهـای $A_1 = \frac{d}{d\rho} + w(\rho)$ و $A_2 = \frac{d}{d\rho} - w(\rho)$ می باشد. که در آن w تابع فوق پتانسیل نامیده می شود که می توانـد با استفاده از معادله بوزنی ریکاتی $V_B = W^2 - W'$ تعیین می شود و یا اینکه مستقیما از منفی مشتق لگاریتمی ψ تعیین می شود $\left(W = -\frac{d}{d\rho} \ln\psi \right)$. مرحله دوم ساختار Witten شامل در نظر گرفتن مـسئله فرمیـونی بـا تغییر علامت مشتق معادله ریکاتی و به دست آوردن پتانـسیل جدیـد V_F کـه بـه عنـوان همتـای "فرمیونیـک" پتانسیل اولیه معرفی می شود ، می باشد . بنابراین: $V_F = W^2 + W'$.

معرفی ساختار دوگانه Darboux

ساختار دوگانه Darboux در یک قالب فوق متقارن اجازه می دهد که به جای اینکه همانند ساختار Witten از جواب خصوصی استفاده نمائیم ، از یک جواب عمومی W_{gen} برای معادله بوزونی ریکاتی استفاده نمائیم.

بنابراین اکنون عملگرهای فاکتورازسیون به صورت $A_1 = \frac{d}{d\rho} + W_{gen}$ و $A_1 = \frac{d}{d\rho} - W_{gen}$ در مـی آینـد. بـا این روش می توان یک خانواده تک پارامتری از پتانسیل های بوزونی معرفی کرد که همتای فرمیونی یکـسانی دارند. بدین معنا که:

$$V_{iso} = V_B - 2\frac{d^2}{d\rho^2}\ln(I(\rho) + \lambda) \qquad (7)$$

که تبدیل Darboux عمومی V_B می باشد. معادله فوق را می توان به صورت زیر نوشت:

$$V_{iso}(\rho, \psi; \lambda) = V_B(\rho) - \frac{4\psi\psi'}{I(\rho)+\lambda} + \frac{2\psi^4}{(I(\rho)+\lambda)^2} \qquad (8)$$

که در آن $I(\rho) = \int_0^\rho \psi^2(r)\, dr$ و λ پارامتر مشخصی است و یک کمیت مثبت و حقیقی است و در واقـع ثابـت انتگرال ریکاتی می باشد[6]. علاوه بر این یک میرایی مدوله بر روی جواب عمومی وجود دارد، به طوری که:

$$\psi(\rho; \lambda) = \sqrt{\lambda(\lambda+1)}\frac{\psi(\rho)}{I(\rho)+\lambda} \qquad (9)$$

که $\sqrt{\lambda(\lambda+1)}$ همان ثابت بهنجارش است و به راحتی می توان نشان داد که:

$$W_{gen} = -\frac{d}{d\rho}\ln\psi(\rho;\lambda) \tag{10}$$

ما متوجه این موضوع هستیم که توابع موج نامنظم مکانیک کوانتومی در بازسازی حالت مقید، مفید واقع می شوند [7]. به منظور دیدن معنای فیزیکی ساختار همسان برای پخش نوترون از تغییر تابع $\psi = \sqrt{\rho}\phi$ استفاده می نمائیم. در این صورت معادله شرودینگر $\psi'' - V_{iso}\psi = 0$ به معادله زیر تبدیل می شود:

$$\rho^2\frac{d^2\phi}{d\rho^2} + \rho\frac{d\phi}{d\rho} - \rho^2 k_{eff}^2\phi = 0 \tag{11}$$

$$k_{eff}^{-1} = \left[k^2 - 2\frac{d^2}{d\rho^2}\ln(I(\rho)+\lambda)\right]^{-1/2} \tag{12}$$

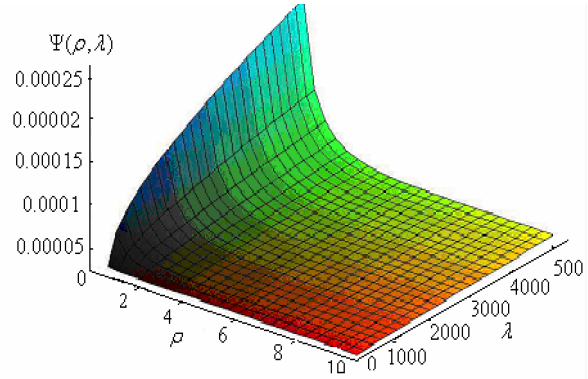
k_{eff} ، طول پخش موثر و وابسته به شار می باشد که همان تبدیل Darboux طول پخش ثابت ، kاست. بنابراین می توان ارتباط بین معادله پخش شار نوترون شعاعی و معادله پخش تک طیفی را مشاهده نمود.

نتایج

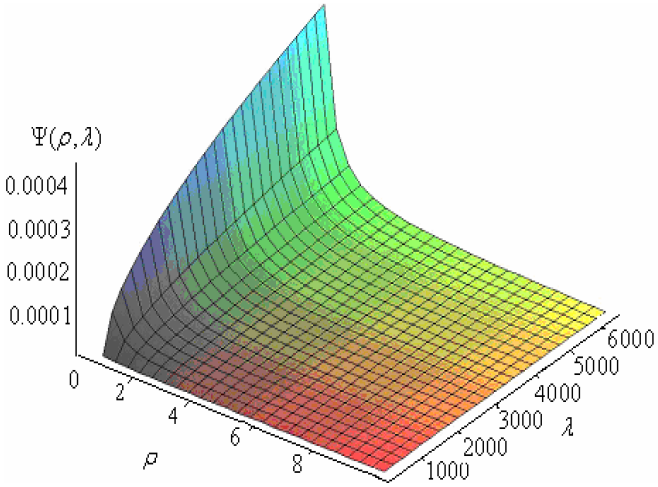
جدول (۱) بترتیب طول پخش (L,cm) ، سطح مقطع ماکروسکپی $(\sum_a(cm^{-1}))$ و ضریب پخش (D,cm) را برای محیط های آب معمولی (H_2O) ، آب سنگین (D_2O) ، برلیوم (Be) و کربن در شکل گرافیت (C) ، نشان می دهد . و همچنین اشکال (۱) و (۲) و (۳) و (۴)، به ترتیب نمودارهای سه بعدی $\psi(\rho;\lambda)$ را که از حل معادله (۹) در ازای ρ ها و λهای مختلف بدست آمده برای محیط های مذکور نشان می دهد [8].

جدول (۱) مقادیر عددي طول پخش ، سطح مقطع ماکروسکپی و ضریب پخش برای محیط های مختلف H_2O, D_2O, Be, C [8].

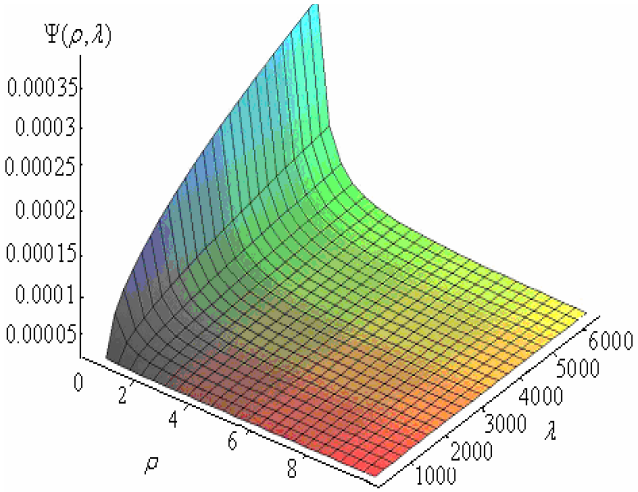
Diffusing media	Diffusion length (L,cm)	Macroscopic cross section $\sum_a(cm^{-1})$	Diffusion coefficient (D,cm)
light water, H_2o	2.75	22×10^{-2}	0.17
heavy water, D_2o	100	8.5×10^{-5}	0.85
beryllium, Be	21	1.2×10^{-3}	0.54
graphite, C	54.2	3.2×10^{-4}	0.94



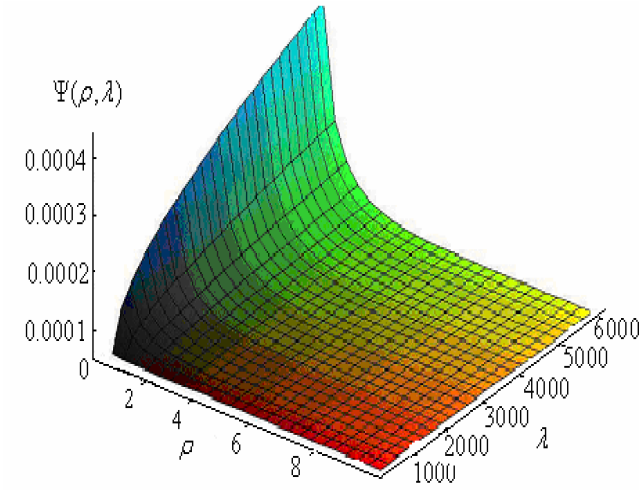
شکل (۱): نمودار سه بعدی ψ در ازای ρ و λ های مختلف برای محیط H_2O.



شکل (۲): نمودار سه بعدی Ψ در ازای ρ و λ های مختلف برای محیط D_2O

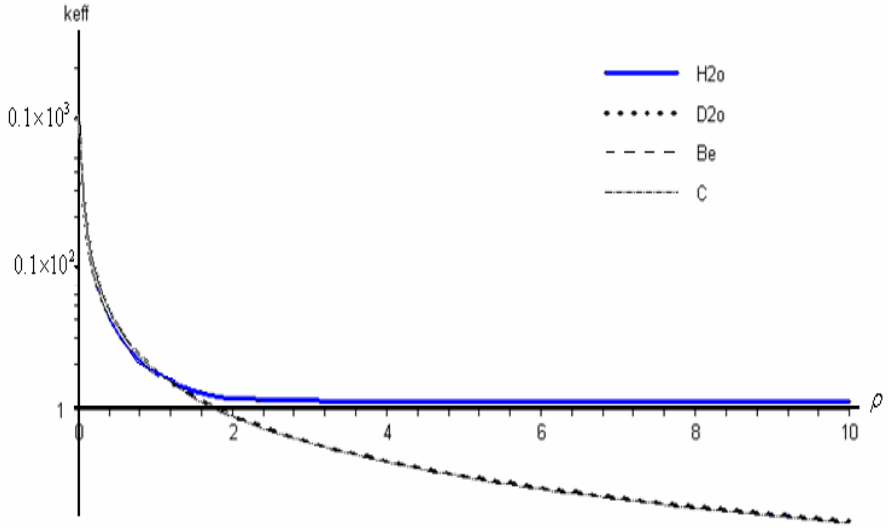


شکل (۳): نمودار سه بعدی Ψ در ازای ρ و λ های مختلف برای محیط Be.



شکل (4): نمودار سه بعدی Ψ در ازاء ρ و λ های مختلف برای محیط C.

وشکل (۵)، نمودار k_{eff} را بر حسب ρ در ازاء $\lambda = 1$ برای محیط های H_2O و D_2O و Be و C نشان می دهد.



شکل (۵)، نمودار تغییرات k_{eff} را بر حسب ρ در ازاء $\lambda = 1$ برای محیط های H_2O و D_2O و Be و C

بحث ونتیجه گیری

با معرفی معادله پخش نوترونی مربوط به چشمه خطی طویل در حالت پایا می توان دریافت که با استفاده از تبدیل فوق تقارن مکانیک کوانتومی یک بعدی Darboux ، می توان معادله پخش را به معادله شرودینگر با پتانسیل $V_B(\rho)$ تبدیل نمود و نشان دادیم که طول پخش ثابت، k، تبدیل به طول پخشی می شود که تابع شار نوترونی است، k_{eff}. همچنین نتایج محاسبات به ما نشان می دهد که k_{eff}، در ازای محدوده وسیعی از λهای مختلف برای محیط های D_2O, Be, C بسیار به هم نزدیک است و تغییرات λ اثر قابل ملاحظه ای بر روی مقدار آن ندارد و در محدوده $0 \le \rho \le 10$ بیشترین تغییرات را خواهیم داشت.

مراجع

[1] E. Witten, Nucl. Phys. B **188**, 513 (1981).
[2] F. Cooper, A. Khare, and U. Sukhatme, Phy. Rep.**251**, 267 (1995).
[3] H.C. Rosu, Phys. Rev. E **56**, 2269 (1997); H.C. Rosu,Phys. Rev. A **54**, 2571 (1996); H.C Rosu and J.Socorro, Phys. Lett. A **223**, 28 (1996).
[4] B. Mielnik, J. Math. Phys. **25**, 3387 (1984); See also,M.M. Nieto, Phys. Lett. B 145, 208 (1997); J. Pappademos,U.Sukhatme,and . Pagnamenta,Phys. Rev. A **48**, 3525 (1993).
[5] G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*,Seconded. (Academic Press, New York, 1970) Example11.5.1.
[6] In the context of the ID Schrödinger Equations generated by the Hyper geometric equation, the Parametric potentialsdepending on an integration constant are termed as semiparametric by G.A. Natanzone,Vestnik Leningrade.Unive. **10**, 22 (1971).
[7] D.S. Krähmer and U. Leonhardt, J. Phys. A **30**, 4783 (1997).
[8] J.R. Lamarsh, "Introduction to Nuclear Engineering",Third edition,Addison-Wesely,1983/2001.