بررسی معادلات پخش نوترون با استفاده از روش المانهای محدود

رسول خدابخش[۱*] ، سهراب بهنیا[۲] ، اختای جهانبخش[۱]
۱-گروه فیزیک، دانشکده علوم ، دانشگاه ارومیه
۲-گروه فیزیک، دانشکده علوم ، دانشگاه آزاداسلامی واحد ارومیه

چکیده:

برای حل عددی معادلات دیفرانسیلی روش های مختلفی مانند روش مونت کارلو،روش تفاضل محدود ، روش المانهای محدود و ... وجود دارد که در این مقاله با استفاده از روش المانهای محدود، معادلات پخش نوترون را مورد بررسی قرار می‌دهیم و به مقایسه نتایج حاصل از روش‌های حل عددی المانهای محدود برای معادله پخش نوترون یک چشمه نقطه‌ای، درون کند کننده محدود با حل تحلیلی می-پردازیم.

کلمات کلیدی: معادله پخش نوترون؛ روش المانهای محدود؛ چشمه نقطه‌ای نوترون

۱–مقدمه

معادله ترابرد نوترون اساسی‌ترین و واقعی‌ترین تعریفی است که برای توزیع انرژی، توزیع فضایی و زاویه‌ای و جهت حرکت نوترونها ارائه شده است وسرآغاز تمامی روشهای حل عددی برای بررسی رفتار نوترونهاست[1]. در عمل معادله ترابرد برای سیستمی با ابعادکوچک قابل حل است و برای سیستم‌هایی با هندسه بزرگ (مانند قلب راکتور) نمی‌توان از این معادله استفاده نمود. با در نظر گرفتن برخی فرض‌ها ازجمله همسانگرد بودن توزیع زاویه‌ای شار نوترون بطور یکنواخت در محل‌هایی که میزان جذب نوترون پایین باشد می‌توان متغییرهای جهتی را از تابع چگالی نوترون حذف و آن را با ساده‌سازی به معادله پخش تبدیل نمود و امکان استفاده از حل عددی را برای سیستم‌های پیچیده فراهم سازیم[2].

روشهای حل عددی بر مبنای ابعاد مش‌های تخمینی به دو دسته تقسیم می‌شوند برخی روشها مانند روش تفاضل محدود (FDM)در محاسبات راکتور از مش‌های بسیار کوچکی از مرتبه یک میانگین پویش آزاد برای نوترون حرارتی (در هر بعد کوچکتر از یک سانتیمتر) استفاده می‌کنند و در مقابل روشهای گرهی(nodal) مانند روش المانهای محدود (FEM) از مش-هایی با ابعاد بسیار بزرگتر از پویش آزاد میانگین استفاده می‌کنند .روش المانهای محدود یک شیوه شناخته شده در ریاضیات کاربردی و علوم مهندسی است که به علت انعطاف پذیری و قابلیت انطباق در برخورد با منحنی‌ها یا شکل‌های هندسی نامنظم و پیچیده به جایگزین قبلی‌اش FDM ترجیح داده می‌شود[3].

۲– روش المانهای محدود

* ارومیه – دانشگاه ارومیه – پردیس نازلو – دانشکده علوم – گروه فیزیک

در این بخش نخست به نحوه بکارگیری روش المانهای محدود اشاره کرده و آن را بر روی معادله کرده و آن را با بر روی معادله پخش نوترون اعمال می‌کنیم. معادله دیفرانسیلی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$L(u) = -f_v \qquad \text{روی حجم v} \qquad (۱)$$

$$l(u) = f_s \qquad \text{روی سطح s حجم v} \qquad (۲)$$

بطوریکه L و l عملگرهای دیفرانسیلی و نشان دهنده معادلات حاکم بر سیستم و شرایط مرزی آن هستند که توسط مشخصات سیستم شکل می‌گیرد u متغیر و f_v و f_s توابع معین هستند. در حل تقریبی در مرحله نخست u_{app} را حدس می‌زنیم در این صورت

$$R(u_{app}) = L(u_{app}) + f_v \qquad (۳)$$

تابع $R(u_{app})$ به عنوان تابع باقی‌مانده شناخته می‌شود که با صفر شدن $R(u_{app})$ می توان به مقدار واقعی u دست یافت. برای دست‌یابی به هدف با بکارگیری تابعی به نام تابع وزن $w(u)$ و انتگرال گیری روی ناحیه مورد مطالعه به شکل زیر اقدام می‌شود

$$\omega(r) = \int_v w(u)R(u)dv = 0 \qquad (۴)$$

برای بالا بردن دقت مسئله، ابتدا سیستم را به المانهای کوچک تقسیم نموده و برای هر المان انتگرال (۴) را بطور جداگانه حل می‌کنیم. الگوی ارائه شده در روش المانهای محدود شامل مراحل زیر می‌باشد:

۱. در **FEM**، تقریب اولیه u بر مبنای تقریب گره‌هاست که از مقادیر معینی از خود متغییر و توابع درون‌یاب استفاده می‌کند. (۵)

$$u(x) = \sum_i N_i(x) u_i(x)$$

u_i پارامتر های مربوط به هر گره و N_i توابع درون‌یاب هستند[5].

۲. کاهش مرتبه مشق انتگرال بمنظور وارد کردن شرایط مرزی به مسئله

۳. مرحله آخر حل دستگاه معادلات ایجاد شده برای بدست آوردن جواب نهایی است.

جزئیات بیشتر در مرجع [4] ذکر شده است.

۳-گسسته سازی معادلات پخش نوترون

سیستمی شامل قلب راکتور و بازتابنده اطراف آن را در نظر می‌گیریم. حجم و سطح خارجی قلب راکتور و بازتابنده را با V_c، S_c ، V_R و S_R نشان می‌دهیم. که شرایط مرزی برای این سطوح در جدول شماره (۱) ارائه شده است. معادله پخش نوترون را برای این سیستم در نظر می‌گیریم

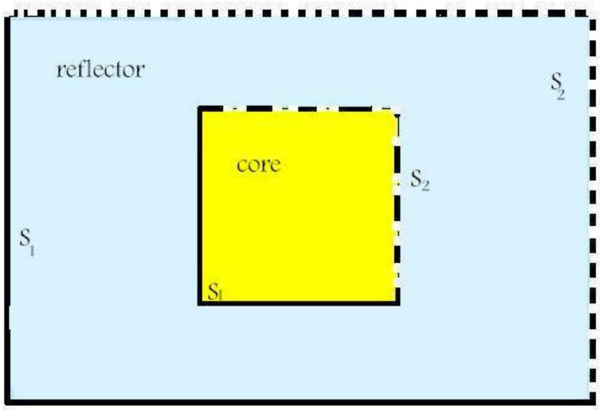
$$-D_c\nabla^2\phi(r) + \Sigma_c\phi(r) = S(r) \qquad r \in V_c \qquad (۶)$$

$$-D_r\nabla^2\phi(r)+\Sigma_r\phi(r)=0 \qquad r\in V_r \qquad (۷)$$

که D ضریب پخش نوترون، Σسطح مقطع ماکروسکوپیک جذب و S شدت چشمه و یا تعداد نوترونهای گسیلی در واحد حجم در واحد زمان می‌باشد.

جدول شماره ۱: شرایط مرزی یک سیستم هسته‌ای[5]

شماره سطح	شرایط مرزی
S_1	$j(r)=0$ *reflection*
S2	$\varphi_c=\varphi_R\,,\, j_c=j_R$
S_3	$1/4\varphi(r)=1/2\,j(r)$ *vacuum*



شکل ۱ : یک سیستم هسته‌ای شامل قلب راکتور و بازتابنده

در جدول بالا $j=-D\dfrac{\partial\varphi(r)}{\partial n}$ چگالی جریان و n بردار یکه عمود بر سطح است. تابع باقی‌مانده را شکل می‌دهیم

$$R(r)=\nabla^2\varphi(r)-\frac{1}{L^2}\varphi(r)+\frac{S(r)}{D} \qquad (۸)$$

که $\dfrac{1}{L^2}=\dfrac{\Sigma}{D}$ و $\varphi(r)$ تخمینی از تابع $\phi(r)$ است در این روش سعی می‌کنیم از طریق ضرب کردن تابع وزن به تابع باقی-مانده و مساوی قرار دادن آن با صفر $\varphi(r)$ را بدست آوریم

$$\int_v w(r)R(r)dV=\int_v w(r)\left[\nabla^2\varphi(r)-\frac{1}{L^2}\varphi(r)+\frac{S(r)}{D}\right]dV=0 \qquad (۹)$$

برای اعمال نمودن شرایط مرزی، مرتبه مشتق ها را کاهش می‌دهیم. با استفاده از جمله اول تابع گرین برای اولین جمله انتگرال فوق داریم:

$$\int_v\left[\vec{\nabla}\varphi(r)\cdot\vec{\nabla}w(r)+\frac{1}{L^2}w(r)\varphi(r)-w(r)\frac{S(r)}{D}\right]dV-\int_s w(r)\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS=0 \qquad (۱۰)$$

در اینجا بسته به نوع مسئله شرایط مرزی را وارد می‌کنیم. به عنوان مثال اگر برای قلب راکتور شرایط مرزی را در نظر بگیریم جمله انتگرال سطحی را بصورت زیر می‌نویسیم:

$$\int_{s_c} w(r)\frac{\partial\varphi}{\partial n}ds=\int_{s_c^1} w(r)\frac{\partial\varphi}{\partial n}ds+\int_{s_c^2} w(r)\frac{\partial\varphi}{\partial n}ds \qquad (۱۱)$$

با توجه به اینکه در مرز S_1 , $j=0$ است لذا جمله اول صفر می‌شود و انتگرال بصورت زیر در می‌آید

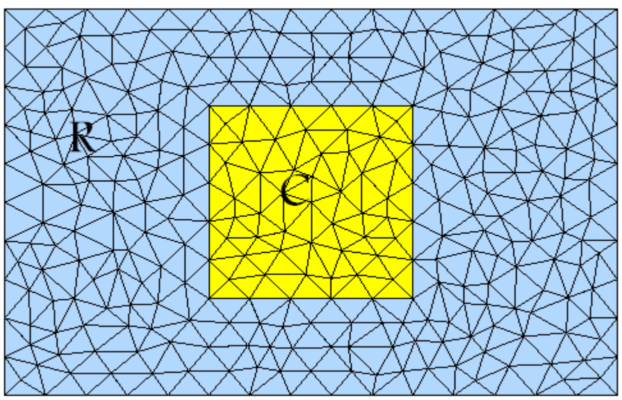
$$\int_{s_c} w(r)\frac{\partial\varphi}{\partial n}ds = -\frac{1}{D_c}\int_{s^2{}_c} w(r)\,j(r)ds \qquad (۱۲)$$

مرحله بعد تعیین تابع $w(r)$ است که در روش المانهای محدود از وردش اول خود تابع $\varphi(r)$ استفاده می‌شود:

$$w(r)=\delta\varphi(r)=\sum \delta N_i(r)\varphi_i \qquad (۱۳)$$

حال حجم مورد نظررا به المانهای کوچک تقسیم نموده(شکل ۲) و انتگرال (۹) را برای هرکدام از این المانها حل می‌کنیم

$$\int_v \left[\nabla^2\left(\sum\delta N_i(r)\varphi_i\right)\cdot\nabla^2\left(\sum N_i(r)\varphi_i\right)-\frac{1}{L^2}\left(\sum\delta N_i(r)\varphi_i\right)\left(\sum N_i(r)\varphi_i\right)-\left(\sum\delta N_i(r)\varphi_i\right)\frac{S(r)}{D}\right]dv \qquad (۱۴)$$
$$-\int_s\left(\sum\delta N_i(r)\varphi_i\right)\frac{\partial\left(\sum N_i(r)\varphi_i\right)}{\partial n}ds=0$$



شکل ۲: مش بندی سیستم

۴- نتایج

۴-۱ حل تحلیلی: به عنوان مثالی از تحلیل معادله پخش نوترون به کمک روش المانهای محدود ،یک چشمه نقطه‌ای همسانگرد که S نوترون در ثانیه تابش می‌کند و درون یک کند کننده نامحدود به شعاع R قراردارد را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم توزیع شار نوترون را درون کند کننده بدست آوریم:

$$\nabla^2\phi(r)-\frac{1}{L^2}\phi(r)=0 \qquad (۱۵)$$

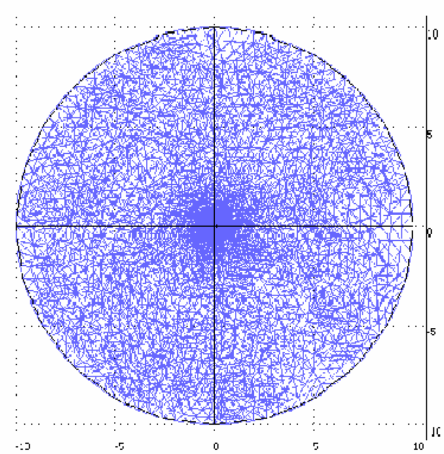
با حل تحلیلی به جواب زیر می‌رسیم

$$\phi(r)=A\frac{\exp(-{}^{r}\!/\!_{L})}{r}+B\frac{\exp({}^{r}\!/\!_{L})}{r} \qquad (۱۶)$$

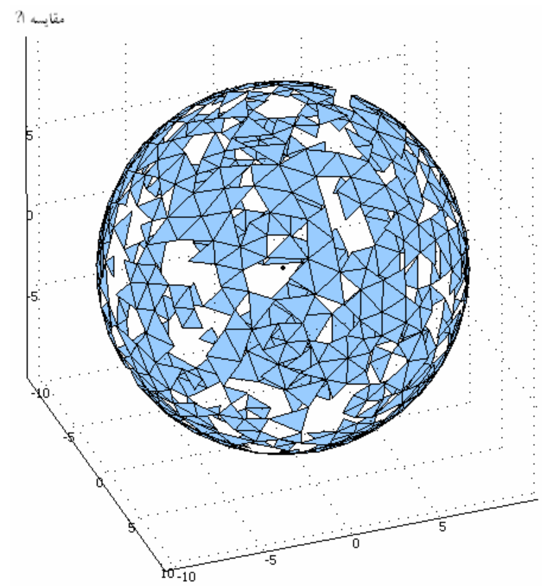
با اعمال شرایط مرزی $\lim_{r\to0}4\pi r^2=S$ و $\phi(R)=0$، تابع شار نوترون از رابطه زیر تبعیت می‌کند:

$$\phi(r)=\frac{S}{4\pi D\left[e^{\left(2R/L\right)}-1\right]r}\left[e^{\frac{2R-r}{L}}-e^{r/L}\right] \qquad (۱۷)$$

۲-۴ حل عددی: برای مقایسه مسئله را بار دیگر به روش FEM حل می‌کنیم اگر کند کننده را آب سنگین D_2O در نظر بگیریم $L=170$ ، $D=0.87$و با فرض $S=10^{12}\ n/_{\sec}$ و $R=10cm$ به تکرار الگوی ذکر شده برای مشخص کردن تابع توزیع نوترون اقدام می‌کنیم. همانطور که ذکر شد ابتدا با مش‌بندی ناحیه(شکل ۳) مورد مطالعه امکان حل عددی را برای هر المان فراهم می‌کنیم که در این مطالعه از المانهای هرمی شکل هرکدام با چهار گره برای مش‌بندی استفاده شده است. تعداد المانها ۱۲۱۶۵ و درجه آزادی سیستم ۱۷۵۴۶ بود.شکل (۱-۳) المانهای داخل حجم و شکل (۲-۳) المانهای مرزی را نشان می‌دهد.

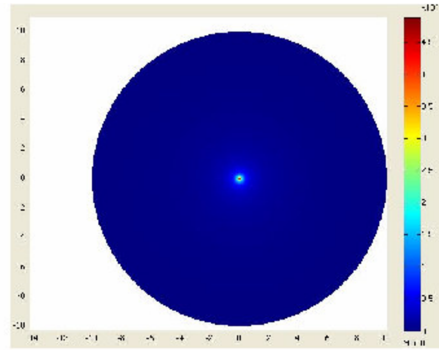


شکل۱- ۳: المانهای مرزی

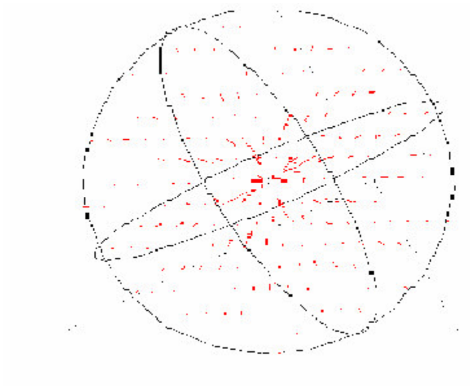


شکل ۲-۳ المانهای حجمی

با تکرار رابطه (۱۴) برای هر المان می‌توان نحوه توزیع شار نوترون را بدست آورد(شکل۴). همچنین گرادیان شار نوترونی نیز در شکل شماره(۵) نشان داده شده است. مقایسه‌ای بین نتایج حاصل، توسط شکل شماره(۶) ارائه شده است که منحنی پیوسته نشان‌دهنده حل عددی و منحنی گسسته مربوط به حل تحلیلی است.

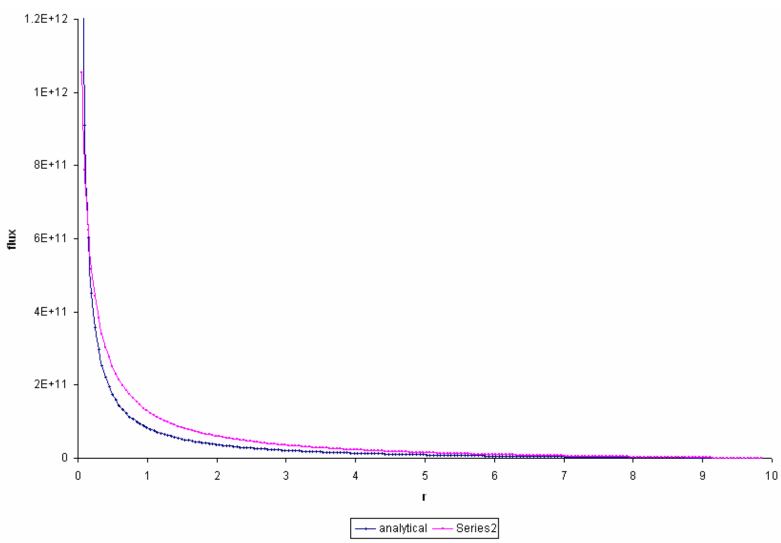


شکل ۴: نحوه توزیع شار نوترون)



شکل ۵:گرادیان شار نوترونی

در روش FEM با افزایش تعدادالمانها دقت حل مسئله بالا می‌رود. در منحنی‌های شکل ۶ بین حل تحلیلی و عددی اختلاف وجود دارد که با افزایش تعداد المانها این اختلاف کمتر می‌شود. همین مسئله با استفاده از روش مونت کارلو نیز حل گردید که روش FEM جواب نسبتاً صحیحتر در مدت زمان خیلی کوتاهتر ارائه می‌داد که نتایج مربوطه متعاقباُ اعلام خواهد شد.



شکل ۶: شار نوترون برای حل عددی و تحلیلی

فهرست مراجع

[1] Kenneth M. Case and paul M. Zweifel. Linear Transport Theory. Addison-wesley.reading. Massachusetts. 1967
[2] James J. Duderstat and Louis J. Hamilton Nuclear Reactor Analysis. Wiley, NewYork, 1967
[3] Eleodor Nichita and Farzad Rahnema A heterogeneous finite element method in diffusion theory , Annals of Nuclear Energy, Volume 30, Issue 3, February 2003
[4] Gouri Dhatt and Gillbert Touzot The Finite Element Method Displayed John Wiley & Sons NewYork 1982[5]
[5]Ozgener A finite element/boundary element hybrid method for 2-D neutron diffusion calculation Annals of Nuclear Energy 31 (2004)