محاسبه حالت مقید سیستم سه جسمی با در نظر گرفتن نیروهای سه جسمی

صادقی ،حسین؛مظلوم شهرکی،مرضیه*؛قنبرزاده،خدیجه

گروه فیزیک دانشگاه اراک

چکیده

در این مقاله، ما با بکار بردن معادله فدیو معادله سیستم سه جسمی مقید را همراه با در نظر گرفتن نیرو هـای سه جسمی حل نموده و انرژی بستگی سیستم سه جسمی و تابع موج آن را به کمک روش ملفلیت-تیجن اسکالر، مربوط به نیرو های دو جسمی با تبادل دو پایونی محاسبه خواهیم نمود.

واژه های کلیدی : نیروهای سه جسمی ، معادله فدیو، تبادل پایونی و سیستمهای مقید

مقدمه

در مسائل عمومی فیزیک در بیشتر مواقع از اثرات برهمکنشهای سه ذره ای یا چند ذره ای به دلیل اینکه تاثیر چندانی در فیزیک مسئله نخواهند داشت، صرفنظر می شود ولی وقتی وارد مقیاسهای کوچک در حد هسته اتم می شویم این نوع بر همکنشها بدلیل قوی بودن نیروهای هسته ای دیگر قابل چشم پوشی نیستند. هر جا صحبت از نیرویی می شود باید به دنبال عامل انتقال این نیرو باشیم به عنوان مثال در مورد نیروهای الکترومغناطیسی(پرتو های گاما) و نیروهای هسته ای قوی (پایونها) که جزء دسته مزونها هستند، عامل انتقال نیرو خواهند بود. در این کار نیروهای سه جسمی که مربوط به تبادل پایون بین نوکلئونهای درون هسته می باشند در محدوده نیروهای هسته ای قوی بررسی می شود. این تبادل پایونی ممکن است بطور همزمان بین سه نوکلئون صورت گیرد و یا اینکه دو نوکلئون اول با هم پایون مبادله کنند وسپس این ارتباط قطع شده و نوکلئون دو و سه، ذره سنگین تری مبادله کنند. تا کنون گروههای تحقیقاتی مختلف توانسته اند جوابهای معادله شرودینگر برای سه نوکلئون را با دقت بسیار بالایی بدست آورند.

این کار در قالب حل معادلات فدیو(Faddeev) نیز انجام گرفته که در آن از بسطهای فوق کروی و روش گوسین یا رهیافتهای تابع گرین مونت کارلو (GFMC) در سیستم های سه نوکلئونی استفاده شده است[1-3] . اصول کار با این روشها به استثنای GFMC، بر پایه بسطهای امواج جزئی استوارند. به تازگی برای مطالعه حالتهای مقید سه بوزونی معادلات فدیو را می توان بر اساس تعریف بردارهای اندازه حرکت نسبی بین ذرات فرمولبندی نمود[4]. معادلات فدیو سه جسمی اولین بار بوسیله Malfliet-Tjon ،[5] و Osborn [6] حل شد و بعد از آن نیز توسط گروههای مختلف دنبال گردید . محاسبات به این روش را می توان در فضای تکا نه [7] ، و یا در فضای هیبرید که در آن از هر دو فضای تکانه و مکان استفاده شده، انجام داد[8]. مقادیر چشمداشتی مربوط به سیستمهای سه نوکلئون از معادله موج با استفاده از

*marzyeh_shahraki84@yahoo.com

روشهای بالا قابل استنتاج است . اما در مورد اسپین و اندازه حرکت وابسته به حالتهای سه نوکلئونی به دلیل دشوار بودن محاسبات اطلاع زیادی را نمی توان کسب کرد.

فرمولبندی معادلات حالت مقید سه جسمی با در نظر گرفتن نیروهای سه جسمی

تابع موج سه ذره یکسان که دارای اندرکنش متقابل(جفت نیرو) $V^i = V_{jk}$ ($i, j, k = 1, 2, 3$) و نیز اندرکنش خالص سه ذره ای V_{123} هستند به کمک معادله شرودینگر به صورت زیر است:

$$|\Psi\rangle = G_0(\sum_{i=1}^{3} V^i + V_{123})|\Psi\rangle. \qquad (۱)$$

که در آن ($G_0 = (E - H_0)^{-1}$) و H_0 هامیلتونی آزاد سیستم و E انرژی بستگی سیستم سه ذره ای است.

برهمکنشهای سه جسمی V_{123} را می توان به صورت زیر به مؤلفه های دیگر تجزیه نمود بطوریکه ($V_4^{(i)}$) تحت جابجایی ذرات j,k متقارن باشد.($i \neq i \neq k$)

$$V_{123} = \sum_{i=1}^{3} V_4^{(i)}, \qquad (۲)$$

که مؤلفه های معادله فدیو به صورت زیر

$$|\Psi\rangle = \sum_{i=1}^{3} |\psi_i\rangle \qquad (۳)$$

با معادله روبرو معرفی می شود :

$$|\psi_i\rangle = G_0(V_i + V_4^{(i)})|\Psi\rangle \qquad (۴)$$

باید در نظر داشت که شکل تابعی مؤلفه های فدیو یکسان است و فقط ذرات تغییر می کنند، بنابراین نوشتن فرم ریاضی یک مؤلفه به صورت مقابل کافی است :

$$|\psi_1\rangle = G_0 t_1 P|\psi_1\rangle + (1 + G_0 t)V_4^{(1)}(1 + P)|\psi_1\rangle \qquad (۵)$$

که در آن t معرف عناصر ماتریسی دوجسمی برای زیر سیستم jk و عملگر جایگشت P به کمک رابطه :

$$P=P_{12}\ P_{23}+ P_{13}\ P_{23}$$

بیان می شوند .بنا براین تابع موج کلی را می توان به صورت زیر نوشت:

$$|\Psi\rangle = (1 + P)|\psi\rangle. \qquad (۶)$$

در اینجا برای حل معادله (۵) از معادلات تکانه ژاکوبی به شکل زیر استفاده می نماییم :

$$\mathbf{p}_i = \frac{1}{2}(\mathbf{k}_j - \mathbf{k}_k)$$
$$\mathbf{q}_i = \frac{2}{3}\left(\mathbf{k}_i - \frac{1}{2}(\mathbf{k}_j + \mathbf{k}_k)\right), \tag{۷}$$

که در آن i,j,k=1,2,3 خواهند بود و به طور چرخشی عوض می شوند. با استفاده از معادلات ژاکوبی (۷) و حذف اندیس اختیاری ۱ در رابطه (۵) خواهیم داشت :

$$\langle \mathbf{pq}|tP + V_4(1+P) + tG_0V_4(1+P)|\psi\rangle. \tag{۸}$$

عناصر ماتریسی t متقارن برای سیستم دو نوکلئونی به صورت زیراست:

$$t_s(\mathbf{p},\mathbf{q};E) = t(\mathbf{p},\mathbf{q};E) + t(-\mathbf{p},\mathbf{q};E) \tag{۹}$$

و با اعمال عملگر جایگشتP در جمله اول (۸) به نتیجه زیر خواهیم رسید:

$$\left[\int d^3q' t_s\left(\mathbf{p},\frac{1}{2}\mathbf{q}+\mathbf{q}';E-\frac{3}{4m}q^2\right)\langle \mathbf{q}+\frac{1}{2}\mathbf{q}',\mathbf{q}'|\psi\rangle + \langle \mathbf{pq}|V_4(1+P)|\psi\rangle \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\int d^3\tilde{p}\frac{t_s\left(\mathbf{p},\tilde{\mathbf{p}};E-\frac{3}{4m}q^2\right)}{E-\frac{\tilde{p}^2}{m}-\frac{3}{4m}q^2}\langle \tilde{\mathbf{p}}\mathbf{q}|V_4(1+P)|\psi\rangle\right] \tag{۱۰}$$

برای حل معادله (۱۰) ، ابتدا باید عناصر ماتریس ($\langle \mathbf{pq}|V_4(1+P)|\psi\rangle$) محاسبه شوند. قبل از محاسبه عناصر این ماتریس، به مثالی از اندرکنش سیستم سه جسمی که در آن دو مزون مبادله می شود، به شکل زیر توجه کنید:

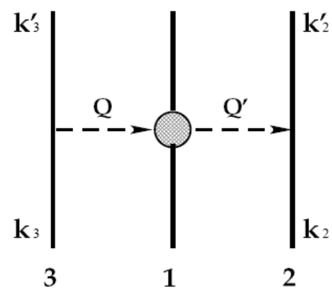
$$V_4 \equiv V_4^{(1)} \propto \frac{F(Q^2)}{Q^2+m_s^2}\,\frac{F(Q'^2)}{Q'^2+m_s^2} \tag{۱۱}$$

که در رابطه (۱۱) تابع برش(cutoff) با رابطه زیر داده می شود:

$$F(Q^2) = \left(\frac{\Lambda^2 - m_s^2}{\Lambda^2 + Q^2}\right)^2. \tag{۱۲}$$

و تکانه انتقال Q (Q') نیز با روابط زیر معین می گردد:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}'_3 = \mathbf{p} - \mathbf{p}' - \frac{1}{2}(\mathbf{q}-\mathbf{q}')$$
$$\mathbf{Q}' = \mathbf{k}'_2 - \mathbf{k}_2 = \mathbf{p} - \mathbf{p}' + \frac{1}{2}(\mathbf{q}-\mathbf{q}'), \tag{۱۳}$$



شکل۱: دیاگرام برهمکنش سه جسمی اضافه شده به محاسبات مربوط به توزیعات دو جسمی را نشان می دهد. Q , Q' نشاندهنده مومنتوم انتقال یافته همزمان بین سه نوکلئون خواهد بود.

که در شکل(۱) نشان داده شده است، با توجه به شکل(۱) می توانیم V_4 را بـه صـورت یکـسری مـزون های مبادله شده بین نوکلئونها درنظر بگیریم. زیـر سیـستم (۱۲) را بـرای راحتـی زیـر سیـستم(۲) و زیـر سیستم (۱۳) نیز برای راحتی(۳) نامیده شده است. حال عناصر ماتریس ذکر شده در بـالا را محاسـبه مـی کنیم:

$$\langle \mathbf{pq}|V_4(1+P)|\psi\rangle = \int d^3q' \frac{F((-\mathbf{p}-\frac{1}{2}\mathbf{q}-\mathbf{q}')^2)}{(-\mathbf{p}-\frac{1}{2}\mathbf{q}-\mathbf{q}')^2+m_s^2}$$
$$\times \int d^3p' \frac{F((-\mathbf{p}+\frac{1}{2}\mathbf{q}-\frac{1}{2}\mathbf{q}'-\mathbf{p}')^2)}{(-\mathbf{p}+\frac{1}{2}\mathbf{q}-\frac{1}{2}\mathbf{q}'-\mathbf{p}')^2+m_s^2} \ \langle \mathbf{p}'\mathbf{q}'|(1+P)|\psi\rangle \tag{۱۴}$$

هنگامی که دو مزون مبادله می شود جملات تنها به تکانه انتقال در یک زیـر سیـستم دو ذره ای وابـسته اند، بنابراین رابطه بالا را به صورت زیر می توان بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned}
&\langle \mathbf{pq}|V_4(1+P)|\psi\rangle \\
&= \int d^3p' d^3q' \ \langle \mathbf{pq}|\mathbf{p}'\mathbf{q}'\rangle_2 \\
&\times \int d^3p'' \frac{F((\mathbf{p}'-\mathbf{p}'')^2)}{(\mathbf{p}'-\mathbf{p}'')^2+m_s^2} \\
&\times \int d^3p''' d^3q''' \ {}_2\langle \mathbf{p}''\mathbf{q}'|\mathbf{p}'''\mathbf{q}'''\rangle_3 \\
&\times \int d^3p'''' \frac{F((\mathbf{p}'''-\mathbf{p}'''')^2)}{(\mathbf{p}'''-\mathbf{p}'''')^2+m_s^2} \ {}_3\langle \mathbf{p}''''\mathbf{q}'''|\Psi\rangle.
\end{aligned} \tag{۱۵}$$

که معرف دامنه با استفاده از روش فدیو، $\psi(\mathbf{p},\mathbf{q})$ یعنی بر حسب بردارهـای انـدازه حرکـت ژاکـوبی از معادله انتگرالی سه بعدی می باشد و فقط وابسته به مقادیر q,p و زاویه بین آنها خواهد بـود. بـرای حـل معادله بالا سیستم مختصات را طوری تعریف می کنیم که بردار q موازی محور z و سایر بردارهای بـاقی مانده بر حسب q بیان شوند. جمله اول این معادله که مربوط به اندرکنشهای دو جسمی است به روشـهای گوناگون قبلا" حل شده است، برای حل جمله دوم داریم :

$$\langle \mathbf{pq}|V_4(1+P)|\psi\rangle = \langle \mathbf{pq}|V_4|\Psi\rangle \qquad (۱۶)$$

که عناصر ماتریسی آن برابر خواهند بود با:

$$\langle \mathbf{pq}|V_4|\Psi\rangle \equiv V_4\Psi(p,q,x) \qquad (۱۷)$$

جمله آخر نیز با انتگرالی مشابه به به همین روش محاسبه خواهد شد.

با توجه به موارد ذکر شده مقادیر ویژه انرژی E و مؤلفه $\psi(p,q,x)$ معادله فدیو با حل معادله (۱۵) خواهد شد:

$$\begin{aligned}\Psi(p,q,x) &= \psi(p,q,x)\\ &+ \psi\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{9}{4}q^2+p^2+3pqx}, \sqrt{\frac{1}{4}q^2+p^2-pqx}, \frac{\frac{3}{8}q^2-\frac{1}{2}p^2-\frac{1}{2}pqx}{\left|-\frac{3}{4}\mathbf{q}-\frac{1}{2}\mathbf{p}\right|\left|-\frac{1}{2}\mathbf{q}+\mathbf{p}\right|}\right)\\ &+ \psi\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{9}{4}q^2+p^2-3pqx}, \sqrt{\frac{1}{4}q^2+p^2+pqx}, \frac{-\frac{3}{8}q^2+\frac{1}{2}p^2-\frac{1}{2}pqx}{\left|+\frac{3}{4}\mathbf{q}-\frac{1}{2}\mathbf{p}\right|\left|-\frac{1}{2}\mathbf{q}-\mathbf{p}\right|}\right) \qquad (۱۸)\end{aligned}$$

که این تابع موجی بهنجار است.

برای محاسبات، پتانسیل یوکاوا را به عنوان اندرکنش دو جسمی Malfliet-Tjon ، به شکل زیر در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned}V(\mathbf{q},\mathbf{q}') &=\\ &-\frac{g_A^2}{(2\pi)^3}\frac{1}{(\mathbf{q}-\mathbf{q}')^2+m_A^2}\left(\frac{\Lambda_A^2-m_A^2}{(\mathbf{q}-\mathbf{q}')^2+\Lambda_A^2}\right)^2\\ &+\frac{g_R^2}{(2\pi)^3}\frac{1}{(\mathbf{q}-\mathbf{q}')^2+m_R^2}\left(\frac{\Lambda_R^2-m_R^2}{(\mathbf{q}-\mathbf{q}')^2+\Lambda_R^2}\right)^2, \qquad (۱۹)\end{aligned}$$

ساده ترین اندرکنش سه جسمی که در مطالعات، می توان به کار برد، از نوع شکل(۱) و به صورت زیـر است:

$$V_4 = \frac{1}{(2\pi)^6}\frac{a_\alpha}{m_\alpha}g_\alpha^2\frac{F_\alpha(Q^2)}{Q^2+m_\alpha^2}\frac{F_\alpha(Q'^2)}{Q'^2+m_\alpha^2}, \qquad (۲۰)$$

که در آن :

$$F_\alpha(Q^2) = \left(\frac{\Lambda_\alpha^2-m_\alpha^2}{\Lambda_\alpha^2+Q^2}\right)^2 \qquad (۲۱)$$

پس از به دست آوردن تابع موج فدیو از رابطه (۱۷) مقادیر چشمداشتی هامیلتونی برهمکنشی به شـکل زیر محاسبه خواهند شد:

$$\langle H\rangle \equiv \langle\Psi|H|\Psi\rangle = \langle\Psi|H_0|\Psi\rangle + \langle\Psi|V_{II}|\Psi\rangle + \langle\Psi|V_{123}|\Psi\rangle, \qquad (۲۲)$$

نوع کاملتر اندرکنش سه جسمی را می توان به شکل زیر معرفی کرد :

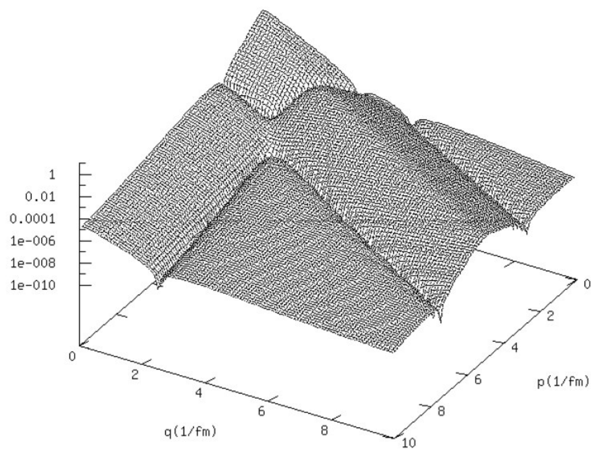
$$V_4 = \frac{1}{(2\pi)^6}\frac{a_\alpha}{m_\alpha}g_\alpha^2\frac{F_\alpha(Q^2)}{Q^2+m_\alpha^2}\frac{F_\alpha(Q'^2)}{Q'^2+m_\alpha^2} + \frac{1}{(2\pi)^6}\frac{a_{\alpha\rho}}{\sqrt{m_\alpha m_\rho}}g_\alpha g_\rho \left(\frac{F_\alpha(Q^2)}{Q^2+m_\alpha^2}\frac{F_\rho(Q'^2)}{Q'^2+m_\rho^2} + \frac{F_\rho(Q'^2)}{Q'^2+m_\rho^2}\frac{F_\alpha(Q^2)}{Q^2+m_\alpha^2}\right) \qquad (۲۳)$$

که جمله اول آن نشان دهنده نیروی جاذبه خواهد، در حالیکه جمله دوم نیرویی دافعه را نشان می دهد.

نتیجه گیری

در این کار معادله فدیو برای حل معادله سیستم سه جسمی مقید همراه با در نظر گرفتن نیروهای سه جسمی بکار برده شده است. انرژی بستگی سیستم سه جسمی و تابع موج آن با روش ملفلیت – تیجن اسکالر مربوط به نیروهای دوجسمی با تبادل دوپایونی محاسبه شده است.

در شکل (۲) مقدار تابع موج حالت مقید سیستم سه جسمی بر حسب فرمی نمایش داده شده است. نیروی سه جسمی بکار رفته در محاسبات از نوع جاذب می باشند.



شکل۲ : مقدار تابع موج حالت مقید سیستم سه جسمی را بر حسب فرمی نمایش میدهد.

مرجع‌ها

[1]R.A.Malfliet,A.J.Tjon; *Nucl. Phys.* ***A*** **127**, 161(1969).
[2]T.A. Osborn, ‘FaddeevsEquationsfor local potential, ***SLAC Report No.*****17**(1967).
[3]A.Picklesimer,R.A.Rice,andR.Brandenburg, Phys.Rev
C**45**,2045(1992),*ibid,*547(1992),*Phys.Rev.****C*****44**,1359(1991).
[4]A.Stadler,W.Glokle,P.U.Sauer,*Phys.Rev.****C*****44**,2319(1991);
[5]A.Stadler and P.U.Sauer,*PhyS.Rev.****C*****46**,64(1992).
[6]A.Nogga,D.Huber,H.Kamada,W.Glockle,*Phys.Lett.B***409**,19(1997).
[7]A.Laverne,C.Gignoux,*Nucl.Phys.A***203**,597(1973).
[8]J.L.Friar,B.F.Gibeon,andG.L.Payne,Z.*Phys.A***301**,**309**(1981);
C.R.Chen,G.L.Payne,J.L.Friar,B.F.Gibeon,*Phys.Rev.****C*****31**,2266 (1985).