حل معادلات انتگرالی سه گانه فدیف-یاکوبوفسکی با در نظر گرفتن برهمکنشهای دوتایی برای سیستمهای مقید سه و چهار-جسمی

هادی‌زاده[۱]، محمدرضا؛ بایگان[۲]، شهریار

دانشکده فیزیک دانشگاه تهران، انتهای خیابان کارگر شمالی، تهران

چکیده

معادلات فدیف-یاکوبوفسکی برای حالتهای مقید سه و چهار جسمی با در نظر گرفتن برهمکنشهای دوتایی در دیدگاه سه‌بعدی, بدون استفاده از نمایش امواج پاره‌ای؛ مستقیماً بصورت معادلات انتگرالی سه‌گانه در فضای تکانه حل شده‌اند. انرژیهای بستگی محاسبه شده برای پتانسیلهای بیکر، وولکف، یاماگوچی و مالفلیت-تیجن توافق بسیار خوبی با نتایج سایر محاسبات دارند.

۱- مقدمه

تا کنون تکنیکهای متعددی برای حل دقیق معادله شرودینگر غیرنسبیتی برای سیستم مقید چهار-جسمی توسعه یافته اند. تکنیک فدیف-یاکوبوفسکی(FY) بر پایه نمایش امواج پاره ای(PW)، که شامل اعداد کوانتومی اسپین و ایزواسپین نیز می باشد، در عمل به دو مجموعه جفت شده از تعداد معینی معادله جفت شده با دامنه هایی که تابع سه متغیر می باشند منجر می شود[۱ و۲]. بنابراین در نمایش امواج پاره ای به تعداد بسیار زیادی از اعداد کوانتومی برای همگرایی نتایج نیاز است. از آنجا که وارد کردن درجات آزادی اسپین و ایزواسپین در کنار اعداد کوانتومی تکانهٔ زاویه‌ای محاسبات را بسیار پیچیده می‌کند، لذا طبیعی به نظر می‌رسد که بطور کامل از نمایش امواج پاره‌ای اجتناب نموده و مستقیماً با متغیرهای برداری کار کنیم. بر این اساس ما اخیرا سیستم مقید چهار-جسمی را در دیدگاه سه بعدی تعمیم داده ایم. ما معادلات فدیف-یاکوبوفسکی را با در نظر گرفتن برهمکنشهای دوتایی برای سیستم چهار نوکلئونی، البته در اولین گام بدون در نظر گرفتن اعداد کوانتومی اسپین و ایزو اسپین، مستقیماً بصورت تابعی از متغیرهای بردار تکانه، بطور مشخص اندازه بردارهای تکانه و زاویه های بین آنها، فرمول‌بندی نموده ایم[۳]. در نهایت دو معادله انتگرالی سه گانه جفت شده با دامنه هایی که تابع شش متغیر می باشند، بدست آورده ایم. حل این معادلات به مراتب ساده تر از حل معادلات متناظر در نمایش امواج پاره ای می باشد. نتایج حاصل از محاسبات برای پتانسیلهای دوتایی مستقل از اسپین بیکر، وولکف، یاماگوچی و پتانسیل میانگین گیری شده روی اسپین مالفلیت-تیجن توافق بسیار خوبی با نتایج سایر محاسبات دارد[۴].

۲- معادلات یاکوبوفسکی برای حالت مقید چهارجسمی

معادلهٔ شرودینگر برای حالت مقید چهار ذرهٔ یکسان، با شش نیروی برهمکنشی جفتی V_{ij}, بصورت زیر است:

---

[1] نشانی الکترونیکی: hadizade@khayam.ut.ac.ir

[2] نشانی الکترونیکی: bayegan@khayam.ut.ac.ir

$$(H_0 + \sum_{i<j} V_{ij})\big|\Psi\big\rangle = E\big|\Psi\big\rangle \qquad (۱)$$

که بصورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\big|\Psi\big\rangle = G_0 \sum_{i<j} V_{ij}\big|\Psi\big\rangle \qquad (۲)$$

و با تعریف مولفه‌های یاکوبوفسکی $\big|\psi_{ij}\big\rangle$ به شش معادلهٔ انتگرالی جفت شده منجر می‌شود: $\big|\Psi\big\rangle = \sum_{i<j}\big|\psi_{ij}\big\rangle$

$$\big|\psi_{ij}\big\rangle = G_0 t_{ij} \sum_{kl\neq ij}\big|\psi_{kl}\big\rangle \qquad (۳)$$

که در آن G_0 انتشارگر آزاد و t_{ij} عملگر دامنه انتقال در زیرسیستم دو جسمی (ij) است. به دلیل چشم‌پوشی از درجات آزادی اسپین و ایزواسپین تابع موج کل $\big|\Psi\big\rangle$ متقارن است و متعاقباً هر شش مولفهٔ یاکوبوفسکی دارای فرم تابعی یکسان هستند. با این دید که هر مولفه شامل توصیفی همزمان از زیرسیستمهای (۱+۳) و (۲+۲) است, بنابراین کافی است که تنها یک مولفهٔ یاکوبوفسکی را در نظر بگیریم:

$$\big|\psi_{12}\big\rangle = G_0 t_{12}(\big|\psi_{13}\big\rangle + \big|\psi_{23}\big\rangle) + G_0 t_{12}(\big|\psi_{14}\big\rangle + \big|\psi_{24}\big\rangle) + G_0 t_{12}\big|\psi_{34}\big\rangle \qquad (۴)$$

واضح است که ترم اول و دوم به ترتیب زیر سیستمهای (۴و۱۲۳), (۳و۱۲۴) را توصیف می‌کنند, که هر دو از نوع (۱+۳) هستند, و ترم سوم زیر سیستم (۳۴و۱۲) را که از نوع (۲+۲) است را توصیف می‌کند. حال ترمهای اول و سوم را به عنوان مولفه‌های یاکوبوفسکی تعریف می‌کنیم که به کمک آنها می‌توانیم کل سیستم چهار جسمی را توصیف کنیم:

$$\begin{cases}\big|\psi_1\big\rangle = \big|\psi_{123,4;12}\big\rangle = G_0 t_{12}(\big|\psi_{13}\big\rangle + \big|\psi_{23}\big\rangle) \\ \big|\psi_2\big\rangle = \big|\psi_{12,34;12}\big\rangle = G_0 t_{12}\big|\psi_{34}\big\rangle\end{cases} \qquad (۵)$$

با تعریف عملگرهای جایگشت $P = P_{12}P_{23} + P_{13}P_{23}$ و $\tilde{P} = P_{13}P_{24}$ و انجام کمی عملیات، مولفه‌های یاکوبوفسکی بصورت زیر بدست می آیند:

$$\begin{cases}\big|\psi_1\big\rangle = G_0 t_{12} P\,[(1+P_{34})\big|\psi_1\big\rangle + \big|\psi_2\big\rangle] \\ \big|\psi_2\big\rangle = G_0 t_{12} \tilde{P}\,[(1+P_{34})\big|\psi_1\big\rangle + \big|\psi_2\big\rangle]\end{cases} \qquad (۶)$$

که عملگر جایگشت P ذرات را در زیر سیستم سه جسمی(۱۲۳) و $\tilde{P}$ زیر سیستم دو–جسمی(۱۲) را با (۳۴) جابجا می کند. تابع موج کل سیستم چهار–جسمی نیز از هجده مولفه یاکوبوفسکی بصورت زیر ساخته می شود:

$$\big|\Psi\big\rangle = (1+P+P_{34}P+\tilde{P})\left[(1+P_{34})\big|\psi_1\big\rangle + \big|\psi_2\big\rangle\right] \qquad (۷)$$

۳- نمایش معادلات یاکوبوفسکی در دیدگاه سه‌بعدی

برای نمایش معادلات جفت‌شدهٔ (۶) در دیدگاه سه‌بعدی، متناظر با دو مولفه مستقل یاکوبوفسکی، از دو مجموعه تکانهٔ ژاکوبی مستقل استفاده می‌کنیم[۴], بطوریکه قبل از نمایش معادلات در این دو پایه, هامیلتونین آزاد را در هر دو پایه و همچنین روابط مربوط به تعامد دو پایه را بدست می‌آوریم. نمایش هر یک از مولفه‌های یاکوبوفسکی در فضای تکانهٔ ژاکوبی متناظر بصورت زیر است:

$$\begin{cases}\langle\vec{u}_1\ \vec{u}_2\ \vec{u}_3\big|\psi_1\rangle = \langle\vec{u}_1\ \vec{u}_2\ \vec{u}_3\big|G_0 t_{12} P\,[(1+P_{34})\big|\psi_1\big\rangle + \big|\psi_2\big\rangle] \\ \langle\vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \vec{v}_3\big|\psi_2\rangle = \langle\vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \vec{v}_3\big|G_0 t_{12} \tilde{P}\,[(1+P_{34})\big|\psi_1\big\rangle + \big|\psi_2\big\rangle]\end{cases} \qquad (۸)$$

برای ارزیابی هر یک از مولفه‌های یاکوبوفسکی می‌توان با وارد کردن عملگرهای همانی به ارزیابی تک تک عبارتهای حاصل در آنها پرداخت, که انجام این کار خود مستلزم ارزیابی جداگانه هر عبارت با وارد کردن

عملگرهای همانی جدید در آن عبارت است. با انجام این کار در نهایت چهار عبارت مستقل حاصل می شود, که بصورت زیر ارزیابی شده‌اند:

$$\langle \vec{u}_1\ \vec{u}_2\ \vec{u}_3|G_0 t_{12} P|\vec{u}_1'\ \vec{u}_2'\ \vec{u}_3'\rangle = \frac{\delta(\vec{u}_3-\vec{u}_3')}{E-u_1^2/m-3u_2^2/4m-2u_3^2/3m} \tag{۹}$$
$$\times\{\ \delta(\vec{u}_2+\vec{u}_1'+\vec{u}_2'/2)\langle \vec{u}_1|\hat{t}(\varepsilon)|\vec{u}_2/2+\vec{u}_2'\rangle+\delta(\vec{u}_2-\vec{u}_1'+\vec{u}_2'/2)\langle \vec{u}_1|\hat{t}(\varepsilon)|-\vec{u}_2/2-\vec{u}_2'\rangle\}$$

$$\langle \vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \vec{v}_3|G_0 t_{12}\tilde{P}|\vec{v}_1'\ \vec{v}_2'\ \vec{v}_3'\rangle = \frac{\delta(\vec{v}_2+\vec{v}_2')\delta(\vec{v}_3-\vec{v}_1')}{E-v_1^2/m-v_2^2/2m-v_3^2/m}\times\langle \vec{v}_1|\hat{t}(\varepsilon^*)|\vec{v}_3'\rangle \tag{۱۰}$$

$$\langle \vec{u}_1'\ \vec{u}_2'\ \vec{u}_3'|1+P_{34}|\vec{u}_1''\ \vec{u}_2''\ \vec{u}_3''\rangle = \delta(\vec{u}_1'-\vec{u}_1'')\{\delta(\vec{u}_2'-\vec{u}_2'')\delta(\vec{u}_3'-\vec{u}_3'') + \delta(\vec{u}_2'-\vec{u}_2''/3-8\vec{u}_3''/9)\delta(\vec{u}_3'-\vec{u}_2''+\vec{u}_3''/3)\} \tag{۱۱}$$

$$\langle \vec{v}_1'\ \vec{v}_2'\ \vec{v}_3'|1+P_{34}|\vec{u}_1'\ \vec{u}_2'\ \vec{u}_3'\rangle = 2\langle \vec{v}_1'\ \vec{v}_2'\ \vec{v}_3'|\vec{u}_1'\ \vec{u}_2'\ \vec{u}_3'\rangle \tag{۱۲}$$

ε و ε^* به ترتیب بیانگر انرژی زیرسیستم (۱۲) در پایه های تکانه ژاکوبی(۱+۳) و (۲+۲) می باشند.
لازم به ذکر است که ارزیابی هر یک از این عبارات خود دارای جزئیات مفصلی است. با جایگذاری عبارات ارزیابی شدهٔ فوق در معادلات جفت شدهٔ (۸) و با استفاده از تقارن هر دو مولفهٔ یاکوبوفسکی تحت جابجائی ذرات برهمکنش کنندهٔ (۱۲) در نهایت معادلات انتگرالی جفت شدهٔ (۱۳) بدست می‌آیند, که این معادلات نقطهٔ آغاز محاسبات عددی هستند, که در بخش بعد به جزئیات مربوط به حل عددی آنها می‌پردازیم.

$$\begin{cases} \langle \vec{u}_1\ \vec{u}_2\ \vec{u}_3|\psi_1\rangle = \dfrac{1}{E-\dfrac{u_1^2}{m}-\dfrac{3u_2^2}{4m}-\dfrac{2u_3^2}{3m}}\int d^3u_2'\ \langle \vec{u}_1|\hat{t}_s(E-\dfrac{3u_2^2}{4m}-\dfrac{2u_3^2}{3m})\Big|\dfrac{\vec{u}_2}{2}+\vec{u}_2'\Big\rangle \\ \qquad\qquad \times\left(\left\langle \vec{u}_2+\dfrac{\vec{u}_2'}{2}\ \ \vec{u}_2'\ \ \vec{u}_3\Big|\psi_1\right\rangle+\left\langle \vec{u}_2+\dfrac{\vec{u}_2'}{2}\ \ \dfrac{\vec{u}_2'}{3}+\dfrac{8\vec{u}_3}{9}\ \ \vec{u}_2'-\dfrac{\vec{u}_3}{3}\Big|\psi_1\right\rangle\right. \\ \qquad\qquad \left.+\left\langle \vec{u}_2+\dfrac{\vec{u}_2'}{2}\ \ -u_2'-\dfrac{2\vec{u}_3}{3}\ \ \dfrac{\vec{u}_2'}{2}-\dfrac{2\vec{u}_3}{3}\Big|\psi_2\right\rangle\right) \\ \langle \vec{v}_1\ \ \vec{v}_2\ \ \vec{v}_3|\psi_2\rangle = \dfrac{1}{E-\dfrac{v_1^2}{m}-\dfrac{v_2^2}{2m}-\dfrac{v_3^2}{m}}\int d^3v_3'\ \langle \vec{v}_1|\hat{t}_s(E-\dfrac{v_2^2}{2m}-\dfrac{v_3^2}{m})|\vec{v}_3'\rangle \\ \quad\vdots \qquad\qquad \times\left(2\left\langle \vec{v}_3\ \ \dfrac{2\vec{v}_2}{3}+\dfrac{2\vec{v}_3'}{3}\ \ \dfrac{\vec{v}_2}{2}-\vec{v}_3'\Big|\psi_1\right\rangle+\langle \vec{v}_3\ \ -\vec{v}_2\ \ \vec{v}_3'|\psi_2\rangle\right) \end{cases} \tag{۱۳}$$

۴- الگوریتم حل عددی

برای حل عددی معادلات جفت شدهٔ (۱۳) بصورت مستقیم بدون استفاده از نمایش امواج پاره‌ای در ابتدا لازم است که دستگاههای مختصات مناسبی انتخاب نمائیم. برای این منظور بردارهای $\vec{u}_3$ و $\vec{v}_3$ را در راستای محور Z و بدون این که از کلیت مسئله بکاهیم بردارهای $\vec{u}_2$ و $\vec{v}_2$ را در صفحه $X-Z$ انتخاب می‌کنیم. برای ارزیابی عبارات موجود در انتگرالها باید سمتگیری بردارهای $\vec{u}_2'$ و $\vec{v}_3'$ را نسبت به بردارهای پایه تکانهٔ ژاکوبی متناظر تعیین کنیم. لذا به این ترتیب متغیرهای مستقل عبارتند از:

$$\begin{cases} \vec{u}_1:u_1,x_1,\varphi_1 \quad \vec{u}_2:u_2,x_2 \quad \vec{u}_3:u_3 \quad \vec{u}_2':u_2',x_2',\varphi_2' \\ \vec{v}_1:v_1,X_1,\Phi_1 \quad \vec{v}_2:v_2,X_2 \quad \vec{v}_3:v_3 \quad \vec{v}_3':v_3',X_3',\Phi_3' \end{cases} \tag{۱۴}$$

به این ترتیب هر مولفهٔ یاکوبوفسکی تابع شش متغیر مستقل خواهد بود. تعداد کل متغیرهای مستقل در هر دو معادلهٔ انتگرالی جفت شده هجده‌تاست. زاویه‌های بین چهار بردار موجود در هر یک از معادلات انتگرالی را می‌توان برحسب پنج متغیر زاویهٔ مستقل متناظر با هر معادلهٔ انتگرالی بدست آورد. هر چند هر مولفهٔ یاکوبوفسکی تابع شش متغیر مستقل؛ که شامل سه متغیر اندازه بردار تکانه, دو متغیر زاویهٔ سمتی و یک متغیر زاویهٔ قطبی است, ولی وجود متغیر زاویهٔ قطبی برای پنج مولفهٔ یاکوبوفسکی موجود در انتگرالده ها بی معنی است, چرا که در هیچ یک برداری که در راستای Z سمتگیری کرده باشد وجود ندارد, لذا وابستگی هر مولفهٔ یاکوبوفسکی را به سه بردار مستقل که متناظر با شش متغیر مستقل است را بصورت کلی تر زیر در نظر می‌گیریم:

$$\left\langle \vec{A}\ \vec{B}\ \vec{C}\middle|\psi_i\right\rangle \equiv \psi_i(A\ B\ C\ X_A^C\ X_B^C\ X_{AB}^C) \qquad (۱۵)$$

که در آن A, B, C اندازه سه بردار تکانهٔ ژاکوبی, X_A^C و X_B^C زاویهٔ بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ نسبت به بردار $\vec{C}$, و X_{AB}^C سمتگیری همزمان دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را نسبت به بردار $\vec{C}$ نشان می‌دهد, بطوریکه $X_{AB}^C = \frac{(\vec{C}\times\vec{A})}{|\vec{C}\times\vec{A}|}.\frac{(\vec{C}\times\vec{B})}{|\vec{C}\times\vec{B}|}$. با اعمال این ملاحظات برای هر مولفهٔ یاکوبوفسکی معادلات جفت شدهٔ (۱۳) بصورت معادلات جفت شدهٔ (۱۶) بازنویسی می‌شوند, هرچند لازم به ذکر است که تعیین اندازه‌ها و زاویه‌های بین بردارهای تکانهٔ موجود در مولفه‌های یاکوبوفسکی در انتگرالده‌ها دارای کمی پیچیدگی است که از بیان آن خودداری می‌نمائیم.

$$\begin{cases}
\psi_1(u_1\ u_2\ u_3\ x_1\ x_2\ \cos\varphi_1) = \dfrac{1}{E-\frac{u_1^2}{m}-\frac{3u_2^2}{4m}-\frac{2u_3^2}{3m}}\int d^3u_2'\ \hat{t}_s(u_1,\ \tilde{\Pi},\ \tilde{x},\ E-\frac{3u_2^2}{4m}-\frac{2u_3^2}{3m})\times \\
\{\psi_1(\Pi_1\ u_2'\ u_3\ x_{12}\ x_{13}\ x_{\Pi_1 u_2'}^{u_3})+\psi_1(\Pi_1\ \Pi_2\ \Pi_3\ x_{22}\ x_{23}\ x_{\Pi_1\Pi_2}^{\Pi_3})+\psi_2(\Pi_1\ \Pi_4\ \Pi_5\ x_{32}\ x_{33}\ x_{\Pi_1\Pi_4}^{\Pi_5})\} \\
\\
\psi_2(v_1\ v_2\ v_3\ X_1\ X_2\ \cos\Phi_1) = \dfrac{1}{E-\frac{v_1^2}{m}-\frac{v_2^2}{2m}-\frac{v_3^2}{m}}\int d^3v_3'\ \hat{t}_s(v_1,\ v_3',\ Y_{13'},\ E-\frac{v_2^2}{2m}-\frac{v_3^2}{m})\times \\
\{2\psi_1(v_3\ \Sigma_1\ \Sigma_2\ X_{12}\ X_{13}\ X_{v_3\Sigma_1}^{\Sigma_2})+\psi_2(v_3\ v_2\ v_3'\ X_{22}\ X_{23}\ X_{v_3 v_2}^{v_3'})\}
\end{cases} \qquad (۱۶)$$

این معادلات دارای فرم کلی ویژه مقداری زیر هستند:

$$K(E)\left|\psi(E)\right\rangle = \lambda(E)\left|\psi(E)\right\rangle \qquad (۱۷)$$

بطوریکه مولفه‌های بردار $\left|\psi(E)\right\rangle$ همان مولفه‌های یاکوبوفسکی هستند و $\lambda=1$ بزرگترین ویژه مقدار مثبت، صرفنظر از نوع پتانسیل بکار برده شده است. ایدهٔ اصلی برای حل این معادله روش تکرار و تکنیک مورد استفاده تکنیک لنکزوس[۵] است. برای حل عددی این معادله باید در ابتدا بازهٔ تکانه‌های ژاکوبی را تعیین نمائیم. همه تکانه ها دارای بازه $[0,\infty)$ می باشند، اما از آنجا که تابع موج به اندازه کافی سریع به سمت صفر میل می کند, ما در عمل تکانه ها را محدود به پارامترهای قطع می کنیم. این پارامترهای قطع برای پتانسیلهای مختلف متفاوت می باشند، ولی باید به اندازه کافی بزرگ انتخاب شوند تا نتایج محاسبات مستقل از آنها باشد. برای گسسته‌سازی متغیرهای پیوسته از نقاط شبکه گاوسی استفاده می‌کنیم. برای انجام محاسبات ابتدا ماتریسهای $\hat{t}_s$ را مستقیماً بصورت تابعی از بردارهای تکانهٔ ژاکوبی محاسبه می کنیم[۶], و

سپس تکرار را با توابع دلخواه گاوسی شروع و پس از چند بار, کمتر از ده بار, متوقف می کنیم. انجام محاسبات ذکر شده مستلزم استفاده از کامپیوترهایی با سرعت پردازش بسیار بالا و حافظهٔ قوی می‌باشد.

۵- نتایج محاسبات

۵-۱- انرژیهای بستگی سیستمهای سه و چهار-جسمی

در جدول ۱ ما انرژیهای بستگی محاسبه شده با تکنیکهای مختلف برای سیستمهای سه و چهار-جسمی را برای پتانسیل بیکر نشان داده ایم. نتایج محاسبات ما برای انرژیهای بستگی سه و چهار-جسمی با مقادیر ۹/۷۶- و ۴۰/۰- مگا الکترون ولت توافق خوبی با نتایج سایر محاسبات دارند.

جدول ۱: انرژیهای بستگی چهار-جسمی برای پتانسیل بیکر. اعداد داخل پرانتز انرژیهای بستگی سه-جسمی می باشند.

Method	VAR	HHE	DFY	FY(PW)	FY[3D)
B. E. [MeV]	-40.03	-40.05	-40.0	-40.03 (-9.76)	-40.0 (-9.76)

برای پتانسیل وولکوف محاسبات ما برای انرژیهای بستگی سه و چهار-جسمی به ترتیب مقادیر ۸/۴۳- و ۳۰/۲- مگا الکترون ولت را نتیجه می دهد و همانطور که در جدول ۲ نشان داده شده است دارای توافق خوبی با نتایج سایر محاسبات می باشند.

جدول ۲: انرژیهای بستگی چهار-جسمی برای پتانسیل وولکوف. اعداد داخل پرانتز انرژیهای بستگی سه-جسمی می باشند.

Method	HH	SVM	VAR	HHE	DFY	FY(PW)	FY[3D)
B. E. [MeV]	-30.42	-30.42	-30.32	-30.40	-30.2	-30.27 (-8.43)	-30.2 (-8.43)

انرژیهای بستگی سه و چهار-جسمی محاسبه شده با تکنیکهای مختلف برای پتانسیلهای نوعی یاماگوچی در جدول ۳ لیست شده اند. نتایج محاسبات ما برای انرژیهای بستگی سه-جسمی برای پتانسیل های نوع یک تا چهار به ترتیب مقادیر ۲۵/۴۱-، ۱۲/۴۵-، ۹/۲۵- و ۸/۵۳- مگا الکترون ولت و متناظرا انرژیهای بستگی چهار-جسمی ۸۹/۸-، ۵۴/۵-، ۳۸/۲- و ۳۶/۲- را نتیجه می دهد. این نتایج نیز دارای توافق خوبی با نتایج سایر محاسبات، مخصوصا با تکنیک2DI، می باشند.

جدول ۳: انرژیهای بستگی چهار-جسمی برای پتانسیلهای یاماگوچی. اعداد داخل پرانتز انرژیهای بستگی سه-جسمی می باشند.

Method	Y-I	Y-II	Y-III	Y-IV
SKFR	-84.66, -90.10, -89.74			
FY (PW)	-89.90 (-25.41)			
2DI	-89.6 (-25.40)	-54.5 (-12.45)	-38.3 (-9.24)	-36.3 (-8.51)
FY (3D)	-89.8 (-25.41)	-54.5 (-12.45)	-38.2 (-9.25)	-36.2 (-8.53)

و همانگونه که در جدول ۴ نشان داده شده است محاسبات ما برای پتانسیل مالفلیت-تیجن نوع پنج انرژی بستگی ۳۱/۳- مگا الکترون ولت را نتیجه می دهد، که دارای توافق خوبی با محاسبات انجام شده اخیر با تکنیکهای EIHH، HH، FY (PW) و SVM و با نتایج سایر محاسبات می باشد. همچنین انرژی بستگی

سه–جسمی محاسبه شده برای این پتانسیل با مقدار ۷/۷۴– مگا الکترون ولت توافق خوبی با مقدار محاسبه شده ۷/۷۳– مگا الکترون ولت در دیدگاه امواج پاره ای با همین تکنیک را دارد.

جدول ۴: انرژیهای بستگی چهار–جسمی برای پتانسیل مالفلیت–تیجن. اعداد داخل پرانتز انرژیهای بستگی سه–جسمی می باشند.

Method	CRCGBV	ATMS	GFMC	CCE	VAR	IDEA
B. E. [MeV]	-31.357	-31.36	-31.3+/-0.2	-31.24	-31.19+/-0.05	-30.98
Method	DMC	HH	SVM	EIHH	FY (PW)	FY (3D)
B. E. [MeV]	-31.5	-31.347	-31.360	-31.358	-31.36 (-7.73)	-31.3 (-7.74)

همانطور که از مقایسه نتایج بدست آمده با نتایج سایر تکنیکها می بینیم، نتایج محاسبات ما در دیدگاه سه بعدی دارای همان دقت می باشند، در حالیکه انجام عملیات محاسباتی آن به مراتب ساده تر می باشد

۵–۲– تست محاسبات

در این بخش پایداری عددی الگوریتم و نمایش سه بعدی مولفه های یاکوبوفسکی را بررسی می نمائیم. بطور مشخص پایداری ویژه مقدار کرنل یاکوبوفسکی، یعنی λ را نسبت به تعداد نقاط شبکه برای تکانه های ژاکوبی و زوایای کروی و قطبی بررسی می نمائیم. همچنین ما کیفیت نمایش سه بعدی مولفه های یاکوبوفسکی را با محاسبه مقدار چشم داشتی عملگر هامیلتونین بررسی می نمائیم. برای هر دو تست ما از پتانسیل مالفلیت–تیجن نوع پنج استفاده می کنیم. در جدول ۵ ویژه مقادیر محاسبه شده برای این پتانسیل با انرژی ۳۱/۳– مگا الکترون ولت برای نقاط شبکه متفاوت ارائه شده است. ما تعداد نقاط شبکه تکانه را بصورت $N_{u_1}=N_{v_1}=N_{v_3}=N_{v_3'}=N^1_{jac}$ و $N_{u_2}=N_{u_3}=N_{v_2}=N^2_{jac}$ انتخاب می کنیم. همانطور که در جدول نشان داده شده است، ویژه مقدار λ به ازای $N^1_{jac}=N^2_{jac}=30$ و $N_{sph}=N_{pol}=20$ به مقدار یک همگرا می شود.

جدول ۵: پایداری ویژه مقدار λ، نسبت به تعداد نقاط شبکه برای تکانه های ژاکوبی و زوایای کروی و قطبی.

N^1_{jac}	20	26	26	30	30
N^2_{jac}	20	20	26	26	30
$N_{sph}=N_{pol}$	20	20	20	20	20
λ	0.987	0.992	0.995	0.998	1.000

با محاسبه انرژی بستگی و مولفه های یاکوبوفسکی ما می توانیم تابع موج کل را محاسبه نمائیم. سپس برای ارزیابی دقت محاسبات ما می توانیم مقدار چشم داشتی هامیلتونین کل را محاسبه نموده و با انرژی بستگی حاصل از حل معادله ویژه مقداری مقایسه نمائیم. مقادیر چشم داشتی انرژی جنبشی $\langle H_0\rangle$، انرژی پتانسیل $\langle V\rangle$ و هامیلتونین کل $\langle H\rangle$ در جدول ۶ ارائه شده اند. در همین جدول مقدار انرژی بستگی محاسبه شده نیز برای مقایسه با مقدار چشم داشتی هامیلتونین ارائه شده است. همانطور که می بینیم مقدار چشم داشتی هامیلتونین با دقت بالائی با مقدار انرژی بستگی حاصل از حل معادله ویژه مقداری تطابق دارد.

جدول ۶: مقادیر چشم داشتی انرژی جنبشی، انرژی پتانسیل و هامیلتونین کل محاسبه شده برای پتانسیل مالفلیت–تیجن.

$\langle H_0\rangle$ $[MeV]$	$\langle V\rangle$ $[MeV]$	$\langle H\rangle$ $[MeV]$	E $[MeV]$
69.7	-101.0	-31.3	-31.3

مرجع‌ها:

[1] H. Kamada and W. Glockle, Nucl. Phys. **A 548**, 205 (1992)
[2] W. Glockle and H. Kamada, Phys. Rev. Lett. **71**, 971 (1993)
[3] M. R. Hadizadeh, S. Bayegan, accepted in Few-Body Systems, nucl-th/0605063.
[4] M. R. Hadizadeh, S. Bayegan,to appear in the proceeding of APFB05 conference, nucl-th/0605067.
[5] A. Stadler, W. Glockle, P. U. Sauer, Phys. Rev. **C 44**, 2319 (1991).
[6] Ch. Elster, J. H. Thomas, and W. Glockle, Few-Body Systems **24**, 55 (1998).