محاسبه انرژی بستگی سیستم های سه جسمی با حل معادلات فدیف برای پتانسیل های تفکیک پذیر وابسته به اسپین

شاکری*، بنین؛ بایگان، شهریار

انتهای خیابان کارگر شمالی، تهران گروه فیزیک دانشگاه تهران،

چکیده

در این مقاله سیستم های مقید سه جسمی با در نظر گرفتن برهمکنش های جفتی بررسی شده اند. با در نظر گرفتن درجه آزادی اسپین، معادلات جفت شده فدیف مربوط به سیستم های سه جسمی در نمایش امواج پاره ای برای حالت موج S با استفاده از نیروی وابسته به مدل حل شده اند. انرژی بستگی سیستم های سه جسمی با استفاده از پتانسیل وابسته به اسپین یاماگوچی، که از نوع پتانسیل های تفکیک پذیر است، محاسبه شده اند.

کلید واژه: معادلات فدیف، امواج پاره ای، پتانسیل تفکیک پذیر، پتانسیل یاماگوچی، برهمکنش جفتی

مقدمه

انرژی بستگی حالت مقید سه جسمی با استفاده از پتانسیل های وابسته به مدل و با تکنیک های متفاوت محاسبه شده اند. یکی از روش های محاسبه انرژی بستگی سیستم های سه جسمی، حل معادلات فدیف است. انرژی بستگی حالت مقید سه جسمی با حل معادلات فدیف در نمایش امواج پاره ای و اخیرا در دیدگاه سه بعدی (۳-D) [۱] بدون استفاده از نمایش امواج پاره ای با در نظر گرفتن برهمکنش های جفتی محاسبه شده اند. هدف ما در این مقاله محاسبه انرژی بستگی سیستم سه جسمی در نمایش امواج پاره ای برای حالت موج s با استفاده از پتانسیل وابسته به اسپین یاماگوچی است.

معادله فدیف برای حالت مقیدسیستم های سه جسمی

معاله شرودینگر برای حالت مقید سه جسمی با در نظر گرفتن برهمکنش های جفتی به صورت زیر توصیف می شود:

$$|\Psi\rangle = G_0 \sum_{i=1}^{3} V_i |\Psi\rangle \qquad (۱)$$

*baninshakery@gmail.com

به طوریکه $G_0=[E-H_0]^{-1}$ انتشار گر آزاد سه جسمی (H_0 انرژی جنبشی سیستم سه جسمی) و $V_i \equiv V_{jk}$ برهمکنش جفتی مربوط به ذرات j و k می باشند.

تابع موج کل سیستم سه جسمی را می توان به صورت مجموع سه مولفه، که اصطلاحا به آنها مولفه های فدیف [۲]می نامند، نوشت. بنابراین با توصیف تابع موج کل این سیستم ها به صورت $|\Psi\rangle=\sum_{i=1}^{3}|\psi_i\rangle$ ، معادلات انتگرالی جفت شده فدیف به صورت زیر ارزیابی می شود:

$$|\psi_i\rangle = G_0 t_i \sum_{j\neq i}|\psi_j\rangle \qquad (۲)$$

t_i در رابطه فوق، عملگر گذار دوجسمی است. این عملگر از معادله لیپمن- شوئینگر که به صورت زیر توصیف می شود، پیروی می کند.

$$t_i = V_i + V_i G_0 t_i \qquad (۳)$$

در ادامه ارزیابی معادلات سیستم سه جسمی، ذرات را یکسان فرمیونی در نظر می گیریم. در ضمن از درجه آزادی ایزواسپین سیستم صرفنظر می کنیم. با در نظر گرفتن این ملاحظات، مولفه های فدیف دارای فرم تابعی یکسانی هستند. لذا در نظر گرفتن یکی از مولفه های فدیف کفایت می کند و دیگر مولفه های فدیف را می توان با عملگر های جایگشتی مناسب بدست آورد.

بنابراین مولفهء فدیف $|\psi_1\rangle$ به رابطه زیر منجر می شود:

$$|\psi_1\rangle = G_0 t P |\psi_1\rangle \qquad (٤)$$

P، عملگر جایگشتی است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$P = P_{12}P_{23} + P_{13}P_{23} \qquad (۵)$$

تابع موج کل سیستم سه جسمی را نیز می توان بر حسب مولفه فدیف $|\psi_1\rangle$ نوشت:

$$|\Psi\rangle = (1+P)|\psi_1\rangle \qquad (٦)$$

نمایش مولفه فدیف در نمایش امواج پاره ای برای حالت موج s

برای نمایش معادله فدیف در دیدگاه امواج پاره ای از تکانه های ژاکوبی استفاده می کنیم. پایه های فضا برای توصیف حالت سیستم سه نوکلئونی به صورت زیر بیان می شود:

$$\left| p\, q\, (l\lambda)L\,(s\frac{1}{2})\, S(SL)J \right\rangle \equiv |\, pq\beta\rangle \qquad (۷)$$

که در این رابطه p تکانه نسبی، l اندازه حرکت مداری و s اسپین زیر سیستم دو نوکلئونی هستند. q تکانه نسبی ذره سوم نسبت به زیر سیستم دو جسمی، λ تکانه زاویه ای مداری ذره سوم و J تکانه زاویه ای کل سیستم سه نوکلئونی می باشند.

برای سیستم سه نوکلئونی ترایتون، $J=\frac{1}{2}$ است. با توجه به نقش غالب موج S در برهمکنش های هسته ای، در محاسباتمان فقط حالت موج S را در نظر می گیریم. در این صورت $L=0$ می باشد. بنابراین حالت های سیستم سه نوکلئونی ترایتون به دو حالت زیر محدود می شود:

$$\begin{aligned}&\left| p\,q\,(l=0\,\lambda=0)L=0\,(s=0\;\frac{1}{2})\,S=\frac{1}{2}(S=\frac{1}{2}\,L=0)J=\frac{1}{2}\right\rangle \equiv \left| pq\alpha=0\right\rangle \\ &\left| p\,q\,(l=0\,\lambda=0)L=0\,(s=1\;\frac{1}{2})\,S=\frac{1}{2}(S=\frac{1}{2}\,L=0)J=\frac{1}{2}\right\rangle \equiv \left| pq\alpha=1\right\rangle\end{aligned} \qquad (۸)$$

برهمکنش های جفتی ذرات با پتانسیل وابسته به اسپین یاماگوچی [۳] در فضای تکانه برای موج S به صورت زیر توصیف می شود:

$$V_\alpha(p,p')=-\frac{\lambda_\alpha}{m}\,g_\alpha(p)g_\alpha(p') \quad ;\, g_\alpha(p)=\frac{1}{p^2+\beta_\alpha{}^2} \qquad (۹)$$

که این پتانسیل از نوع پتانسیل های تفکیک پذیر است. اندیس α بیان کننده اسپین سیستم دو نوکلئونی است. $\alpha=0$ و $\alpha=1$ به ترتیب حالت های زیر سیستم دو نوکلئونی با اسپین صفر و یک را توصیف می کنند. و $m^{-1}=41.47\,MeV\,fm^2$ می باشد.

برای سازگاری عملگر گذار دو جسمی با پتانسیل های تفکیک پذیر، این عملگر را به صورت زیر توصیف می کنیم:

$$t=\sum_{\alpha=0}^{1}\hat{P}_\alpha\left| g_\alpha\right\rangle\tau_\alpha\left\langle g_\alpha\right|\hat{P}_\alpha \qquad (۱۰)$$

در رابطه فوق $\hat{P}_\alpha$ عملگر تصویر روی حالت های α است. $\tau_\alpha(E)$، اصطلاحا انتشارگر دوجسمی نامیده می شود. با حل معادله لیپمن–شوئینگر، $\tau_\alpha(E)$ به صورت زیر محاسبه می شود[۴]:

$$\tau_\alpha(E)=\left[\frac{m}{\lambda_\alpha}-4\pi\int dq\,q^2\,\frac{g_\alpha(k)^2}{E-\frac{k^2}{m}}\right]^{-1} \qquad (۱۱)$$

با در نظر گرفتن ملاحظات فوق، نمایش مولفه فدیف $\left|\psi_1\right\rangle\equiv\left|\psi\right\rangle$ برای سیستم سه نوکلئونی ترایتون در دیدگاه امواج پاره ای برای موج S عبارتند از:

$$\langle pq\alpha|\psi\rangle = 4\pi G_0(p,q)\sum_{\alpha'=0}^{1}\int dq' q'^2 \int_{-1}^{1} dx\, g_\alpha(p)\tau_\alpha(E-\frac{3}{4}\frac{q^2}{m})\, g_{\alpha'}(\pi_1) G_{\alpha\alpha'}\langle \pi_2 q'\alpha'|\psi\rangle \qquad (۱۲)$$

که در آن $G_{\alpha\alpha'}$ کمیت هندسی است. برای اگاهی از جزئیات بیشتر کمیت هندسی به مراجع [۵-۶] مراجعه کنید. π_1,π_2 عبارتند از:

$$\pi_1 = \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + q'^2 + qq'x}$$
$$\pi_2 = \sqrt{\frac{1}{4}q'^2 + q^2 + qq'x} \qquad (۱۳)$$

با تعریف $\langle pq\alpha|\psi\rangle = \psi_\alpha(p\,q)$، معادله بالا را می توان به شکل ساده زیر نوشت:

$$\psi_\alpha(p\,q) = G_0(p,q)\tau_\alpha(E-\frac{3}{4}\frac{q^2}{m})F_\alpha(q) \qquad (۱۴)$$

که در این رابطه F_α به صورت زیر توصیف می شود:

$$F_\alpha(q) = \sum_{\alpha'=0}^{1}\int dq' q'^2 \int_{-1}^{1} dx\, g_\alpha(\pi_1) G_0(\pi_2,q')\, g_{\alpha'}(\pi_2)\tau_{\alpha'}(E-\frac{3}{4}\frac{q'^2}{m})F_{\alpha'}(q') \qquad (۱۵)$$

معادلات انتگرالی جفت شده (۱۵) نقطه آغاز محاسبات عددی برای محاسبه انرژی بستگی سیستم مقید سه نوکلئونی می باشند. به جزئیات حل عددی این معادلات در بخش بعد می پردازیم.

حل عددی و نتایج محاسبات

معادلات انتگرالی جفت شده (۱۵) دارای فرم کلی زیرهستند:

$$K(E)|\psi\rangle = |\psi\rangle \qquad (۱۶)$$

به طوریکه $K(E)$ بیانگر کرنل معادلات جفت شده (۱۵) می باشد. و $|\psi\rangle$ به صورت $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} |F_{\alpha=0}\rangle \\ |F_{\alpha=1}\rangle \end{pmatrix}$ توصیف می شود. این معادله حالت خاصی از معادله ویژه مقداری زیر با $\lambda=1$ است، بطوریکه این ویژه مقدار بزرگترین ویژه مقدار مثبت می باشد:

$$K(E)|\psi\rangle = \lambda(E)|\psi\rangle \qquad (۱۷)$$

کرنل رابطه (۱۷) شامل انتگرالهای متعدد روی متغیرهای پیوسته تکانه و زاویه می باشد. این معادله انتگرالی را با استفاده از روش عددی گاوس-لژاندرگسسته می کنیم. معادله ویژه مقداری (۱۷) با تکنیک لنکزوس [۷] حل شده است. به علت کوتاه برد بودن نیروهای هسته ای تابع موج سیستم سه نوکلئونی برای تکانه های بزرگتر از تکانه قطع بسیار ناچیز می باشد. بنابراین در حل عددی معادلات فدیف بازه های مربوط به متغیر های تکانه که از $(0,\infty)$ است را به بازه $(0,cutoff)$ تبدیل می کنیم. لازم به ذکر است که تکانه های قطع را به اندازه کافی بزرگ

انتخاب می کنیم تا نتایج حاصل از محاسبات مستقل از تکانه های قطع باشند. در انجام محاسبات تکانه های قطع را به صورت $u_1^{\max}=30\,fm^{-1}$ و $u_2^{\max}=10\,fm^{-1}$ انتخاب کردیم. تعداد نقاط شبکه برای تکانه ها و زوایا ۳۲ نقطه در نظر گرفته شده است. نتایج محاسبات عددی برای انرژی بستگی سیستم مقید سه نوکلئونی برای چهار نوع از پتانسیل یاماگوچی در جدول ۱ ارائه شده است.

جدول۱. انرژی بستگی سیستم مقید سه جسمی برای پتانسیل وابسته با اسپین یاماگوچی

$\lambda_0\left(fm^{-3}\right)$	$\beta_0\left(fm^{-1}\right)$	$\lambda_1\left(fm^{-3}\right)$	$\beta_1\left(fm^{-1}\right)$	$B_3\left(MeV\right)$
-0.149	1.165	-0.416	1.450	-14.5
-0.1323	1.130	-0.3815	1.406	-10.13
-0.1323	1.130	-0.3628	1.406	-8.52
-0.1430	1.150	-0.2489	1.334	-3.50
EXP.				**-8.48**

با مقایسه نتایج محاسباتمان با داده های تجربی می توان استنتاج کرد که انرژی بستگی حاصل از پتانسیل نوع سوم توافق بهتری با نتایج تجربی دارد.

انتظار می رود با در نظر گرفتن اعداد کوانتومی بیشتر و وارد کردن ایزو اسپین توافق بهتری با نتایج تجربی حاصل شود.

مراجع:

[1] Ch. Elster, W. Schadow, A. Nogga and W. Glockle, arXiv:nucl-th/9805018.
[2] W.Meier and W.glockle, Phys. Rev. **C 28**,1807(1983).
[3] Y. Yamaguchi, Phys. Rev. **95** (1954) 1628.
[4] L. Platter, H. W. Hammer and U. G. Meisner, arXiv:nucl-th/0409040.
[5] W. GlockleThe Quantum Mechanical Few-Body Problem.
[6] A. R. Edmonds, Angular Momentum in Quantum Mechanics
[7] A. Stadler, W. Glockle, P. U. Sauer, Phys. Rev. **C 44**, 2319 (1991).