محاسبه انرژی بستگی سیستم مقید سه جسمی با استفاده از تئوری میدان موثر

بایگان×، شهریار؛ شاکری، بنین، هادی‌زاده، محمدرضا
گروه فیزیک دانشگاه تهران، انتهای خیابان کارگر شمالی، تهران
× bayegan@khayam.ut.ac.ir

چکیده

سیستم مقید سه جسمی با در نظر گرفتن برهمکنشهای دوتایی بررسی شده اند. معادلات فدیف برای حالت مقید سه جسمی بر اساس تئوری میدان موثر با استفاده از پتانسیل برهمکنشی موثر و همچنین در دیدگاه امواج پاره ای برای پتانسیل مدل یاماگوچی برای حالت موج s ، بدون در نظر گرفتن اعداد کوانتومی اسپین و ایزو اسپین حل شده اند و انرژی بستگی سیستم مقید سه جسمی محاسبه شده است.

کلید واژه: معادلات فدیف، تئوری میدان موثر ، پتانسیل یاماگوچی، برهمکنش جفتی، حالت مقید

مقدمه

سیستم مقید سه نوکلئونی مدتهاست که مورد توجه است و تحقیقات گسترده ای روی آن، برای دستیابی به اطلاعاتی مفید دربارهٔ نیروهای دوجسمی و سه جسمی، انجام شده است. محاسبات حالت مقید سه‌جسمی قبلاً با حل معادلات فدیف، در نمایش امواج پاره‌ای(PW) و اخیرا در دیدگاه سه-بعدی(3-D) بدون استفاده از نمایش امواج پاره ای انجام شده است. این محاسبات با تکنیکهای متفاوت و با در نظر گرفتن نیروهای دوجسمی و سه جسمی مدل انجام شده است [۱-۳]. در سالهای اخیر تئوری مستقل از مدلِ میدان موثر در بررسی سیستمهای چند-جسمی اهمیت فراوانی پیدا کرده است، به این دلیل که در این تئوری لزومی به استفاده از پتانسیل مشخصی نیست و می توان برهمکنش نوکلئونها را با یک پتانسیل برهمکنشی موثر توصیف کرد[۴]. هدف ما در این مقاله محاسبه انرژی بستگی سیستم مقید سه جسمی با استفاده از پتانسیل مدل یاماگوچی و همچنین استفاده از پتانسیل برهمکنشی موثر در تئوری میدان موثر می باشد.

معادله فدیف برای حالت مقید سه جسمی

معادلهٔ شرودینگر برای حالت مقید سه ذرهٔ یکسان، با نیروهای برهمکنشی جفتی ($V_i \equiv V_{jk}$)، بصورت زیر است:

$$|\Psi\rangle = G_0 \sum_{i=1}^{3} V_i |\Psi\rangle \qquad (۱)$$

که با تعریف مولفه‌های فدیف $|\Psi\rangle=\sum_{i=1}^{3}|\psi_i\rangle$ به سه معادلهٔ انتگرالی جفت شده منجر می‌شود:

$$|\psi_i\rangle=G_0 t_i\sum_{j\neq i}|\psi_j\rangle \qquad (۲)$$

بواسطهٔ صرفنظر از درجات آزادی اسپین و ایزواسپین تابع موج کل $|\Psi\rangle$ متقارن است و متعاقباً هر سه مولفهٔ فدیف دارای فرم تابعی یکسان هستند، پس کافی است که تنها یک مولفهٔ فدیف را در نظر بگیریم. با تعریف عملگر جایگشت $P=P_{12}P_{23}+P_{13}P_{23}$، مولفهٔ فدیف عبارت است از:

$$|\psi\rangle=G_0 tP|\psi\rangle \qquad (۳)$$

نمایش معادله فدیف در فضای تکانه

شکل کلی پتانسیل برهمکنشی موثر معرفی شده توسط تئوری میدان موثر غیر نسبیتی با برهمکنشهای کوتاه برد را می توان بصورت بسطی از تکانه های نسبی فرودی، $\vec{k}$، و خروجی ذرات، $\vec{k}'$، نوشت که برای بخش موج S بصورت زیر است:

$$\langle\vec{k}'|V|\vec{k}\rangle=\lambda_2+\lambda_{2,2}\frac{(k^2+k'^2)}{2}+\ldots \qquad (۴)$$

نمایش این پتانسیل موثر در فضای تکانه و در پایین ترین مرتبه عبارت است از:

$$\langle\vec{k}'|V|\vec{k}\rangle=\langle\vec{k}'|g\rangle\lambda_2\langle g|\vec{k}'\rangle \qquad \lambda_2<0 \qquad (۵)$$

که در آن λ_2 ثابت جفت شدگی دوجسمی و توابع تنظیم کنندهٔ $g(k)\equiv\langle g|\vec{k}\rangle=exp(-\frac{k^2}{\Lambda_2^2})$ همان توابع شکل هستند. برهمکنش (۵) تفکیک پذیر است و لذا می توان با استفاده از آن معادله لیپمن-شوئینگر را بصورت تحلیلی حل کرد. ماتریس t دوجسمی را می توان چنین نوشت:

$$t(E)=|g\rangle\tau(E)\langle g| \qquad (۶)$$

که $\tau(E)$ با حل تحلیلی معادله لیپمن-شوئینگر عبارت است از:

$$\tau(E)=\left[\frac{1}{\lambda_2}-4\pi\int_0^{\Lambda_2}dqq^2\frac{g(k)^2}{E-k^2}\right]^{-1} \qquad (۷)$$

$\tau(E)$ درحالت مقید دو جسمی یک قطب ساده در $E=-B_2$ دارد که با استفاده از آن می توان ثابت جفت شدگی $\lambda_2(B_2,\Lambda_2)$، را با تخمین پارامتر قطع Λ_2، و به تبع آن $\tau(E)$ را محاسبه کرد. در دیدگاه وابسته به مدل، برای پتانسیل نوعی یاماگوچی نیز می توان $\tau(E)$ را مشابه معادله (۷) محاسبه کرد:

$$\langle\vec{k}'|V|\vec{k}\rangle=\frac{\lambda_2}{m}g(k)g(k') \qquad (۸)$$

که در آن $g(k)=\frac{1}{p^2+\beta^2}$ است.

با در نظر گرفتن ملاحظات فوق نمایش معادله (۳) در فضای تکانه ژاکوبی بصورت زیر در می آید:

$$\psi(u_1,u_2)=4\pi\, G_0(u_1,u_2)\, g(u_1)\,\tau\left(E-\frac{3}{4}u_2^2\right)\int_0^\infty du_2' u_2'^2 \int_{-1}^{1} dx\, g(\pi(u_2,u_2'))\psi(\pi(u_2',u_2),u_2') \qquad (۹)$$

که در آن $\bar{u}_1$ تکانه ژاکوبی زیرسیستم دوجسمی و $\bar{u}_2$ تکانه ژاکوبی ذره سوم نسبت به زیرسیستم دوجسمی است، Λ_3 پارامتر قطع تکانه دوم ژاکوبی و G_0 انتشارگر آزاد برای سیستم سه جسمی است. با استفاده از:

$$\psi(u_1,u_2)=G_0(u_1,u_2)\, g(u_1)\,\tau\left(E-\frac{3}{4}u_2^2\right)F(u_2) \qquad (۱۰)$$

می توان معادله (۹) را در نهایت بصورت زیر بازنویسی کرد:

$$F(u_2)=4\pi\int_0^{\Lambda_3} du_2'\, u_2'^2 \int_{-1}^{+1} dx\, g(\pi(u_2,u_2'))G_0(\pi(u_2',u_2),u_2')\, g(\pi(u_2,u_2'))\,\tau\left(E-\frac{3}{4}u_2'\right)F(u_2') \qquad (۱۱)$$

بطوریکه $\pi(u_2,u_2')=\sqrt{\frac{1}{4}u_2^2+u_2'^2+u_2u_2'x}$.

این معادله نقطهٔ آغاز محاسبات عددی برای محاسبه انرژی بستگی سیستم مقید سه جسمی است که در بخش بعد به جزئیات مربوط به حل عددی آن می‌پردازیم.

الگوریتم حل عددی

در این بخش به تشریح الگوریتم حل عددی معادله انتگرالی دوگانه (۱۱) می‌پردازیم. این معادله دارای فرم زیر است:

$$F(u_2)=\int_0^{\Lambda_3}\int_{-1}^{+1} dx\, K(u_2,u_2',x)F(u_2') \qquad (۱۲)$$

که این معادله شکل خاصی از معادله ویژه مقداری زیر با $\lambda=1$ است:

$$K(E)\left|F(E)\right\rangle=\lambda(E)\left|F(E)\right\rangle \qquad (۱۳)$$

بطوریکه $\lambda=1$ بزرگترین ویژه مقدار مثبت، صرفنظر از نوع پتانسیل بکار برده شده است. ما این معادلهٔ ویژه مقداری را با روش مستقیم حل کرده‌ایم. برای گسسته سازی انتگرالهای معادله (۱۲) از روش گاوس-لژاندر استفاده کرده ایم، بطوریکه تعداد نقاط شبکه گاوسی برای هر دو متغیر u_2' و x سی و دو نقطه می باشد. این معادله پس از گسسته سازی بصورت زیر در می آید:

$$\begin{aligned} F(u_2(i)) &= \sum_j\sum_k w_j w_k K(u_2(i),u_2'(j),x(k))*\frac{\Lambda}{2}*F(u_2'(j)) \\ &\equiv \sum_j\sum_k M(u_2(i),u_2'(j),x(k))F(u_2'(j)) \end{aligned} \qquad (۱۴)$$

که می توان آن را بصورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} F_i &= \sum_j M_{ijk}F_j \qquad , \sum_K M_{ijk}=N_{ij} \\ &= \sum_j N_{ij}\, F_j \end{aligned} \qquad (۱۵)$$

بنابراین در نهایت می توان با محاسبه ماتریس N با ابعاد (۳۲×۳۲) و سپس قطری کردن آن طیف ویژه مقادیر آن را محاسبه کرد. به این ترتیب می توان انرژی ای را جستجو کرد که به ازای آن بزرگترین ویژه مقدار ماتریس N، یک باشد، که این انرژی همان انرژی بستگی سیستم مقید سه جسمی خواهد بود.

نتایج محاسبات

الف) انرژی بستگی با استفاده از پتانسیل مدل

نتایج محاسبات ما برای انرژی بستگی سیستم مقید سه جسمی برای چهار نوع از پتانسیل یاماگوچی در جدول یک ارائه شده است. در انجام محاسبات از واحد $\hbar c = 1$ استفاده کرده ایم، همچنین جرم نوکلئونها را $m^{-1} = 41.47\ Mev.fm^2$ و پارامترهای قطع را $\Lambda_2 = 30\ fm^{-1}$, $\Lambda_3 = 10\ fm^{-1}$ درنظر گرفته ایم. با مقایسه مقادیر بدست آمده با انرژی بستگی ترایتون می توان گفت که پتانسیل آخر می تواند توصیف مناسبی از ترایتون ارائه دهد.

جدول۱. انرژی بستگی سیستم مقید سه جسمی برای پتانسیل یاماگوچی

$\lambda_2 (fm^{-3})$	$\beta (fm^{-1})$	$B_3 (MeV)$
-0.415	1.45	-25.41
-0.353	1.45	-12.45
-0.182	1.15	-9.24
-0.179	1.15	**-8.51**
EXP.		**-8.48**

ب) انرژی بستگی با استفاده از تئوری میدان موثر

برای انجام محاسبات در تئوری میدان موثر از واحدهای $m = \hbar = 1$ استفاده کرده ایم، همچنین پارامترهای قطع را $\Lambda_2 = 25\ fm^{-1}$, $\Lambda_3 = 7\ fm^{-1}$ و ثابت جفت شدگی را $\lambda_2 = -0.0030\ fm$ درنظر گرفته ایم. مقدار انرژی بستگی محاسبه شده با این پارامترها $B_3 = -8.88\ MeV$ است که تقریبا توصیف مناسبی از ترایتون ارائه می دهد. البته لازم به ذکر است که نتایج بدست آمده با استفاده از پتانسیل مدل به پارامترهای قطع وابستگی ندارد، درحالیکه نتایج محاسبات در تئوری میدان موثر با درنظر گرفتن تنها برهمکنشهای دو-جسمی وابستگی شدیدی را به به پارامترهای قطع نشان می دهد که انتظار می رود با در نظر گرفتن برهمکنشهای سه-جسمی این وابستگی از بین برود. علاوه بر این انتظار می رود که با وارد کردن برهمکنشهای سه-جسمی و همچنین اعداد کوانتومی اسپین و ایزو اسپین انرژیهای بستگی محاسبه شده با انرژی بستگی ترایتون تطابق بهتری داشته باشد.

مرجع‌ها:

[1] A. Stadler, W. Glockle, P. U. Sauer, Phys. Rev. **C 44**, 2319 (1991).

[2] Ch. Elster, W. Shadow, A. Nogga, W. Glockle, Few-Body System **27** 83 (1999).

[3] H. Liu, Ch. Elster, W. Glockle, Comput. Phys. Commun. **147**, 170 (2002).

[4] L. Platter, H. W. Hammer, U. G. Meisner, Few-Body System **0** 1 (2004).