محاسبه ترازهای انرژی بر طبق مدل هسته تغییر شکل یافته سه محوری (تغییر شکل بدون تقارن محوری)

محمد فرهاد رحیمی , وحید میرزایی
بخش فیزیک دانشگاه فردوسی- مشهد
farhimi@yahoo.com , vahid_1382_2003@yahoo.com

چکیده :

ترازهاي انرژي در پتانسيل هسته هاي غير كروي را ميتوان به وسيله مدل نيلسون تعيين كرد. اما مدل نيلسون تغيير شكل هسته را به گونه اي در نظر مي گيرد كه هسته داراي تقارن محوري باشد. ما سعي كرده ايم كه ترازهاي انرژي هسته هاي غير كروي را با فرض اين كه تغيير شكل به گونه اي باشد كه هسته را به صورت بيضوي با معادله $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ در نظر بگيريم، به وسيله اختلال مرتبه اول واگن توسط برنامه كامپيوتري به دست آوريم.

هاميلتوني اصلي H عبارتست از ها ميلتوني مدل لايه اي هسته اي H_0 كه به صورت زير مي باشد :

$$H = H_0 + H_1 \qquad (1)$$

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 r^2 + C\vec{l}.\vec{s} + D\vec{l}^{\,2} \qquad (2)$$

$$H_1 = -m\omega_0^2 r^2 \lambda \left\{ \frac{\beta}{\sqrt{2}} Sin(\gamma) Y_{2,-2} + \beta Cos(\gamma) Y_{2,0} + \frac{\beta}{\sqrt{2}} Sin(\gamma) Y_{2,2} \right\} \qquad (3)$$

ما این معادلات را برای اعداد کوانتمی N, l, j, Ω متناظر با پارامترهای مدل نیلسون و مدل تغییر شکل یافته سه محوری ، برای مقادیر $j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$, $l = 1,2,3$, $N = 1,2,3$ حل کرده و ترازها ي انرژی مربوطه را رسم کرده ایم .

واژگان کلیدی :

مدل نیلسون , مدل تغییر شکل یافته سه محوری , اعداد کوانتومی N, l, j, Ω , ترازهای انرژی , هامیلتونی نیلسون و هامیلتونی تغییر شکل یافته سه محوری

مقدمه :

مدل لايه اي هسته مي تواند اعداد مرموز و خواص بسياري از ترازهاي هسته اي را توضيح دهد . مشكل مدل لايه اي آنست كه بسياري از گشتاورهاي چهار قطبي مشاهده شده نسبت به مقدار پيش بيني شده توسط مدل لايه اي بسيار بزرگترند. وين واتر نشان داد كه مي توان در قالب مفاهيم مدل لايه اي چنين گشتاورهاي بزرگي را با اين فرض كه مغز هسته تغيير شكل يافته توضيح داد. يعني اگر شكل مغز هسته بيضوي باشد گشتاوري متناسب با تغيير شكل آن به دست مي آيد. اين تغيير شكل مغز هسته معرف اثرات چند جسمي است و در نتيجه مدهاي تجمعي تحريك شده امكان پذير مي شوند. هسته تغيير شكل يافته به صورت يك پتانسيل غير كروي عمل مي كند. ترازهاي انرژي يك تك ذره در چنين پتانسيلي توسط مدل نيلسون قابل محاسبه است كه تلفيقي از مدل لايه اي هسته اي و مدل جمعي سيستم هاي دوران كننده ا ست ، اما مدل نيلسون در واقع هسته را به شكل بيضي داور با تقارن محوري با معادله $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ در نظر مي گيرد. اما در مدل بدون تقارن محوري هسته به صورت بيضويي بدون تقارن محوري با معادله $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ در نظر گرفته مي شود.

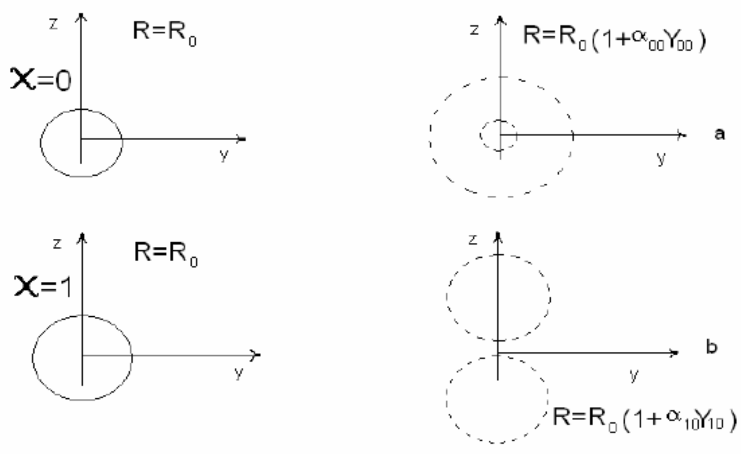
تغيير شكل سه محوري :

اگر هسته را شبيه به قطره مايع غير قابل تراكمي در نظر بگيريم ، شعاع انحناي هسته مي تواند بوسيله بر هم نهي هماهنگ هاي كروي به صورت زير بر حسب پارامترهاي شكل $\alpha_{\chi\mu}$ نوشته شود.

$$R(\theta,\varphi)=R_0\left(1+\sum_{\chi\mu}\alpha^*_{\chi\mu}Y_{\chi\mu}(\theta,\varphi)\right) \qquad (4)$$

به طوريكه χ درجه قطبش نوسا نگر و μ تصوير آن مي باشد . R_0 نشان دهنده شعاع درحالت تعادل كروي است.

مقادير $\chi=0,1$ با فرضيات ما قابل حذف شدن مي باشند. زيرا به ازاي $\chi=0$ تغيير شكل به گونه اي است كه خلاف فرض غير قابل تراكم بودن هسته مي باشد و $\chi=1$ نشان دهنده تغيير مكان هسته (تغيير مركز تكانه) مي باشد.



شكل 1.غير مجاز بودن مقادير $0,1$ پارامتر χ با توجه به فرضيات a) $\chi = 0$ بيانگر انبساط يا انقباض هسته b) $\chi = 1$ بيانگر جابجايي هسته مي باشد كه به علت فرض عدم دخالت نيروي خارجي صحيح نيست.

اولين مرتبه تغيير شكل ، از مرتبه چهار قطبي معادل با $\chi = 2$ مي باشد كه يك تغيير شكل بيضوي (سه محوري) را بيان مي كند. براي به دست آوردن تغيير شكل بيضوي مي توان تعداد پنج پارامتر $\alpha_{\chi\mu}$ مربوط به $\chi = 2$ را به دو پارامتر تغيير شكل به صورت زير تقليل داد :

$$\alpha_{20} = \beta Cos(\gamma)$$
$$\alpha_{22} = \alpha_{2-2} = \frac{\beta}{\sqrt{2}} Sin(\gamma)$$

كه عامل $\frac{1}{\sqrt{2}}$ از آنجا انتخاب شده است كه :

$$\sum_{\mu} \left|\alpha_{2\mu}\right|^2 = \sum_{\mu} \left|\alpha'_{2\mu}\right|^2 = \beta^2$$

يعني تحت تبديل چرخش بايد ناوردا باشند.

پارامتر β نشان دهنده اندازه تغيير شكل هسته (كشيدگي يا پهن شدگي) مي باشد در حاليكه γ متغير زاويه اي وابسته به سهم محورهاي اصلي نسبت به حالت كروي مي باشد .مقدار $\gamma = 0°$ متناظر با حالت كشيده (سيگاري شكل) و $\gamma = 60°$ متناظر با حالت پخت (ديسك شكل) است . مقادير ميان اين دو بيانگر حالت بيضوي شكل مي باشد . پارامتر تغيير شكل δ مرتبط با β را به صورت زير تعريف مي كنيم :

$$\delta = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\beta \cong 0.946\beta \qquad (5)$$

پس ميتوان رابطه (4) را به صورت زير نوشت :

$$R_i = R_0\left[1 + \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\beta Cos\left(\gamma - \frac{2\pi i}{3}\right)\right] \qquad (6)$$

كه $i = 1,2,3$ در R_i به ترتيب همان مؤلفه هاي x, y, z مي باشند. به طور مشابه به جاي اينكه تغيير شكل هسته را به تغيير شعاع آن نسبت دهيم مي توان اين تغيير را به بسامد زاويه اي آن نسبت داد و براي هريك از مؤلفه هاي x, y, z بسامد زاويه اي يك سهم جداگانه ω_i در نظر گرفت.

$$\omega_i = \omega_0\left[1 - \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\beta Cos\left(\gamma - \frac{2\pi i}{3}\right)\right] \qquad (7)$$

وسپس با قراردادن آن در پتانسيل نوسانگر، هاميلتوني مطلوب را بدست آورد .

به روش ديگرميتوان معادله يك بيضوي در مختصات متصل به جسم به صورت زير نوشت.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (8)$$

كه x, y, z در مختصات دكارتي بوده و در مختصات كروي به صورت زير هستند :

$$x = RSin(\theta)Cos(\varphi)$$
$$y = RSin(\theta)Sin(\varphi)$$
$$z = RCos(\theta)$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

چون حجم هسته ثابت فرض می شود , لذا براي تساوي حجم كره اي با شعاع R و بيضوي معادله(8) بايد شرط زير برقرار باشد :

$$abc = R^3 \tag{9}$$

با انتخاب a,b,c به صورت زير

$$a = R_0 e^{-\delta_1/3}, b = R_0 e^{-\delta_2/3}, c = R_0 e^{(\delta_1+\delta_2)/3} \tag{10}$$

و با فرض تغييرات كوچك δ وبسط و نگه داشتن جملات خطي نسبت به δ خواهيم داشت :

$$e^{-\delta_1/3} = 1 - \delta_1/3 + ... \tag{11a}$$
$$e^{-\delta_2/3} = 1 - \delta_2/3 + ... \tag{11b}$$
$$e^{(\delta_1+\delta_2)/3} = 1 + (\delta_1 + \delta_2)/3 + ... \tag{11c}$$

و در نتيجه

$$R^2 \cong \frac{x^2}{(1-\delta_1/3)^2} + \frac{y^2}{(1-\delta_2/3)^2} + \frac{z^2}{(1+(\delta_1+\delta_2)/3)^2} \tag{12}$$

با توجه به اينكه داريم

$$\omega_{x,y,z} = \frac{R}{a_{x,y,z}}\varpi_0 \tag{13}$$

كه a_x, a_y, a_z به ترتيب متناظر با a,b,c در معادله (8) هستند و با تعريف

$$\delta_1 = -\sqrt{\frac{45}{4\pi}}\beta Cos\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\right)$$
$$\delta_2 = \sqrt{\frac{45}{4\pi}}\beta Cos\left(\gamma - \frac{4\pi}{3}\right) \tag{14}$$

و يا به عبارت ديگر

$$\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2\pi}{15}}(\delta_2 - \delta_1) = \frac{\beta}{\sqrt{2}}Sin(\gamma)$$
$$\frac{1}{3}\sqrt{\frac{4\pi}{15}}(\delta_2 + \delta_1) = \beta Cos(\gamma) \tag{15}$$

خواهيم داشت :

$$a_x = R\left\{1+\sqrt{\frac{15}{4\pi}}\frac{\beta}{2}\left[Sin(\gamma)-\frac{1}{\sqrt{3}}Cos(\gamma)\right]\right\} \qquad (16a)$$

$$a_y = R\left\{1+\sqrt{\frac{15}{4\pi}}\frac{\beta}{2}\left[Sin(\gamma)+\frac{1}{\sqrt{3}}Cos(\gamma)\right]\right\} \qquad (16b)$$

$$a_z = R\left\{1+\sqrt{\frac{15}{4\pi}}\frac{\beta}{\sqrt{3}}Cos(\gamma)\right\} \qquad (16c)$$

و بنابراین طبق معادله (13)

$$\omega_i = \frac{\varpi_0}{1+\beta\sqrt{\frac{5}{4\pi}}Cos\left(\gamma-\frac{2\pi i}{3}\right)} \qquad (17)$$

که $i = 1,2,3$ و به ترتیب معرف $\omega_3 = \omega_z, \omega_2 = \omega_y, \omega_1 = \omega_x$ مي باشند.

و در نتيجه پتانسيل نوسانگر نايكروند به صورت زير درخواهد آمد :

$$V_{oH} = \frac{m}{2}\left(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2\right) \qquad (18)$$

$$= \frac{m}{2}R^2\omega_0^2\left(\frac{Sin^2(\theta)Cos^2(\varphi)}{\left[1+\beta\sqrt{\frac{5}{4\pi}}Cos\left(\gamma-\frac{2\pi}{3}\right)\right]^2}+\frac{Sin^2(\theta)Sin^2(\varphi)}{\left[1+\beta\sqrt{\frac{5}{4\pi}}Cos\left(\gamma-\frac{4\pi}{3}\right)\right]^2}+\frac{Cos^2(\theta)}{\left[1+\beta\sqrt{\frac{5}{4\pi}}Cos(\gamma)\right]^2}\right)$$

$$\cong \frac{m}{2}R^2\omega_0^2\left\{1-2\beta Cos(\gamma)Y_{2,0}-\frac{2}{\sqrt{2}}\beta Sin(\gamma)\left(Y_{2,2}+Y_{2,-2}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}m\omega_0^2R^2 - mR^2\omega_0^2\beta\left[Y_{2,0}Cos(\gamma)+\frac{Sin(\gamma)}{\sqrt{2}}\left(Y_{2,2}+Y_{2,-2}\right)\right] \qquad (19)$$

با مقايسه رابطه اخير با معادله (4) پارامترهاي تغيير شكل به صورت زير در می آيند :

$$\alpha_{2,\pm1} = 0$$

$$\alpha_{2,0} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{4\pi}{5}}(\delta_1+\delta_2) = \beta Cos(\gamma)$$

$$\alpha_{2,\mp2} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2\pi}{15}}(\delta_2-\delta_1) = \frac{\beta}{\sqrt{2}}Sin(\gamma)$$

بنابراين تغيير شكل چهار قطبي را مي توان به وسيله دو پارامتر β, γ در دستگاه متصل به جسم بيان كرد . صحت رابطه (جمله اختلالی) را مي توان به وسيله قرار دادن $\gamma = 0, \delta_1 = \delta_2 = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}\beta$ در پتانسيل نيلسون مقايسه كرد.

هاميلتوني مدل تغيير شكل يافته سه محوري :

با ملاحظه هاميلتوني مدل تغيير شكل يافته نيلسون مي توان هاميلتوني تغيير شكل يافته سه محوری متناظر را نوشت . با در نظر گرفتن هاميلتوني مدل نيلسون به صورت زير :

$$H=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\left(\omega_\perp\left(x^2+y^2\right)+\omega_z^2 z^2\right)+C\vec{l}.\vec{s}+D\vec{l}^{\,2}$$

ملاحظه می شود که اگر در معادله بالا سهم ω_x,ω_y را از هم جدا کنیم می توان به هامیلتونی مدل تغییر شکل یافته سه محوری رسید.

$$H_D=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\left(\omega_x^2x^2+\omega_y^2y^2+\omega_z^2z^2\right)+C\vec{l}.\vec{s}+D\vec{l}^{\,2}$$
$$=h_{sph}-\hbar\omega_0\beta\lambda R^2\left[Cos(\gamma)Y_{2,0}+\frac{Sin(\gamma)}{\sqrt{2}}\left(Y_{2,2}+Y_{2,-2}\right)\right] \tag{20}$$

به طوریکه

$$h_{sph}=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega_0^2R^2+C\vec{l}.\vec{s}+D\vec{l}^{\,2}$$

که در آن $\hbar\varpi_0\cong 41A^{-\frac{1}{3}}(Mev),\lambda=\frac{m\omega_0}{\hbar}\cong 0.986A^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{fm}\right)^2$. ها میلتونی h_{sph} معرف هامیلتونی کروی است .

در واقع از آنجایي که براي پتانسیل نوسانگر هماهنگ ویژه مقدار انرژي جنبشي براي هر ویژه حالت با ویژه مقدار پتانسیل براي هر ویژه حالت برابراست , بنابراین انرژي تك ذره اي کل در یك هسته باعدد اتمي A برابر است با :

$$E=M\omega^2\mathrm{A}\left\langle r^2\right\rangle \tag{21}$$

که مقدارمیانگین توان دوم شعاع $\left\langle r^2\right\rangle$ تقریباً از رابطه زیر بدست مي آید :

$$\left\langle r^2\right\rangle\cong\frac{3}{5}R_c^2 \tag{22}$$

$R_c\cong 1.2A^{1/3}\times10^{-13}cm$ شعاع کولنی هسته است. به فرض برابری تعداد پروتونها و نوترونها , و اینکه مقدار بیشینه انرژي برابر E_A باشد داریم :

$$A=\sum_{N=0}^{N_0}2P_N=\frac{2}{3}(N_0+1)(N_0+2)(N_0+3)$$
$$\cong\frac{2}{3}(N_0+2)^3+lower\ \ order\ \ of(N_0) \tag{23}$$
$$\frac{E}{\hbar\omega}=\sum_{N=0}^{N_0}2P_N\left(N+\frac{3}{2}\right)\cong\frac{1}{2}(N_0+2)^4-\frac{1}{3}(N_0+2)^3+.... \tag{24}$$

با حذف (N_0+2) از دو معادله(24) و(23) و نگه داشتن بالا ترین توانهاي (N_0+2) خواهیم داشت :

$$\frac{\mathrm{E}}{\hbar\omega}\cong\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}A\right)^{4/3} \tag{25}$$

بنابراین با استفاده از معادلات (21) و(22) و(25) رابطه پیش گفته زیر را بدست می آوریم :

$$\hbar\omega\cong 41A^{-1/3}Mev$$

محاسبه ویژه توابع هامیلتوني اختلال نیافته H_0:

ویژه توابع هامیلتوني بدون تغییر شکل به صورت زیر مي باشد.

$$\Psi_{nlm}(r,\theta,\varphi)=N_{nl}\exp\left(-\frac{1}{2}\lambda r^2\right)r^l\frac{(-1)^n}{n!}{}_1F_1\left(-n,l+\frac{3}{2},\lambda r^2\right)\left[\Phi_l^j(\theta,\varphi)\right] \tag{26}$$

که در آن قسمت زاويه اي ويژه تابع عملگرهاي $\vec{S}^2, \vec{L}^2, J_z, \vec{J}^2$ است . تابع ${}_1F_1$ در قسمت شعاعي همان تابع فوق هندسي مي باشد. آرگونهاي ${}_1F_1$ به ترتيب عبارتند از: (n) تعداد گره هاي تابع شعاعي , l اندازه حركت زاويه اي . اعداد n,l با عدد كوانتومي N (عدد كوانتومي نوسانگر) به صورت زير در رابطه هستند.

$$N = 2n + l - 2 \qquad l \le N \qquad n = 1,2,3,... \qquad l = 0,1,2,... \qquad (27)$$

ضريب بهنجارش $N_{n,l}$ به صورت زير مي باشد.

$$N_{nl} = \frac{2^{l/2-n/2+3/2}\left[(2n+2l-1)!!\right]^{\frac{1}{2}}}{\pi^{\frac{1}{4}}\left[(n-1)!\right]^{\frac{1}{2}}(2l+1)!!} \qquad (28)$$

كه در آن

$$(2l+1)!! = \frac{(2l+1)!}{2^l\, l!} \qquad (29)$$

محاسبه ویژه مقادیر:

ويژه مقادير هاميلتوني نوسانگر هماهنگ كروی به صورت زير مي باشد.

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$$
$$H\Psi = E\Psi$$
$$E = \hbar\omega\left(N + \frac{3}{2}\right) \qquad (30)$$

ديديم كه جملات $C\vec{l}.\vec{s}, D\vec{l}^2$ در هاميلتوني ظاهر مي شوند. با فرض معادله(26) خواهيم داشت.

$$\vec{j} = \vec{l} + \vec{s} \qquad (31)$$
$$\vec{j}^2\left|N,l,j,\Omega\right\rangle = \hbar^2 j(j+1)\left|N,l,j,\Omega\right\rangle \qquad (32)$$
$$\vec{s}^2\left|N,l,j,\Omega\right\rangle = \hbar^2 s(s+1)\left|N,l,j,\Omega\right\rangle \qquad (33)$$
$$\vec{j}_z\left|N,l,j,\Omega\right\rangle = \hbar\Omega\left|N,l,j,\Omega\right\rangle \qquad (34)$$

كه $\vec{s}$ عملگر اسپين , $\vec{l}$ اندازه حركت زاويه ای و Ω تصوير عملگر $\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$ روی محور z متصل به جسم مي باشد .

حال براي به دست آوردن ترازهاي انرژي هاميلتوني طبق معادله(20) , با فرض معلوم بودن ويژه مقادير و ويژه بردارهاي قسمت h_{sph} در رابطه (20) , قسمت اضافی را به صورت اختلال مرتبه اول واگن محاسبه مي كنيم.

انرژي هاميلتوني متناظربا معادله (20) را مي توان به صورت زير نوشت.

$$E(N,l,j,\Omega) = \hbar\omega_0\left(N + \frac{3}{2}\right) - \hbar\omega_0\beta\lambda\varepsilon(\beta,\gamma) - \hbar\varpi_0 k\left[j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} + \mu l(l+1)\right] \quad (35)$$

اين رابطه متناظربا انرژی ترازهای نيلسون است با اين تفاوت كه در اينجا $\varepsilon(\beta,\gamma)$ جايگزين $\varepsilon(\beta)$ در انرژی ترازهای نيلسون شده است. جمله $\varepsilon(\beta,\gamma)$ بيانگر انرژي مربوط به هاميلتوني اختلالي

($-\hbar\omega_0\beta\lambda R^2\left[Cos(\gamma)Y_{2,0}+\frac{Sin(\gamma)}{\sqrt{2}}\left(Y_{2,2}+Y_{2,-2}\right)\right]$) است. همچنین رابطه بین $\hbar\omega_0 , \hbar\varpi_0$ در دو مدل متفاوت مـی باشد . در واقع رابطه بین $\hbar\omega_0 , \hbar\varpi_0$ درمعادله (35) به صورت زیر است.

$$\omega_0=\varpi_0\left[\left(1+\beta\sqrt{\frac{5}{4\pi}}Cos\left(\gamma-\frac{2\pi}{3}\right)\right)\left(1+\beta\sqrt{\frac{5}{4\pi}}Cos\left(\gamma-\frac{4\pi}{3}\right)\right)\left(1+\beta\sqrt{\frac{5}{4\pi}}Cos(\gamma)\right)\right]^{\frac{1}{3}} \qquad (36)$$

پارامتر β , δ طبق معادله (5) به هم مربوطند.

با توجه به ملاحظات بالا تراز هاي انرژي هاميلتوني (20) را مي توان با استفاده از رابطه بين ϖ_0 , ω_0 , طبق معادله (36) براي مقادير مختلف γ بدست آورد.

عبـارت $-\hbar\omega_0\beta\lambda R^2\left[Cos(\gamma)Y_{2,0}+\frac{Sin(\gamma)}{\sqrt{2}}\left(Y_{2,2}+Y_{2,-2}\right)\right]$ را بوسيله اختلال مرتبـه اول واگن محاسبه مي كنيم ، بـراي مثـال ماتريـسهاي $\left\langle N,l,j,\Omega'\left|\left[Cos(\gamma)Y_{2,0}+\frac{Sin(\gamma)}{\sqrt{2}}\left(Y_{2,2}+Y_{2,-2}\right)\right]\right|N,l,j,\Omega\right\rangle$ و ويـژه مقـادير آنهـا بـه ازاى $l=1,2,3\ \&\ j=\frac{3}{2},\frac{5}{2},\frac{7}{2}$ در زير آورده شده اند .

$$\begin{bmatrix} -0.0631 & 0 & -0.1093 & 0 \\ 0 & 0.0631 & 0 & -0.1093 \\ -0.1093 & 0 & 0.0631 & 0 \\ 0 & -0.1093 & 0 & -0.0631 \end{bmatrix} \quad l=1,2\ \&\ j=\frac{3}{2}\ \&\ \gamma=\frac{\pi}{3}\Rightarrow eigen\quad values=\begin{bmatrix} 0.1262 \\ -0.1262 \\ 0.1262 \\ -0.1262 \end{bmatrix} \qquad (37)$$

كه در اين ماتريسها ترتيب چينش ويژه حالتها در سطر ها و ستونها به ترتيب ازحالت مربوط به بيشترين ويژه مقدار عملگر j_z تا كمترين ويژه مقدار آن مي باشد يعني به عنوان مثال اولين و آخرين درايه ماتريس ها به ترتيب از چپ به راست عبارتند از :

$\left\langle N,l,j,\Omega=j\left|H_1\right|N,l,j,\Omega=j\right\rangle\ \&\ \left\langle N,l,j,\Omega=-j\left|H_1\right|N,l,j,\Omega=-j\right\rangle$

و نيز

$$\begin{bmatrix} -0.0901 & 0 & -0.0855 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0180 & 0 & -0.1147 & 0 & 0 \\ -0.0855 & 0 & 0.0721 & 0 & -0.1147 & 0 \\ 0 & -0.1147 & 0 & 0.0721 & 0 & -0.0855 \\ 0 & 0 & -0.1147 & 0 & 0.0180 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0855 & 0 & -0.0901 \end{bmatrix} \quad l=2,3 \,\&\, j=\frac{5}{2} \,\&\, \gamma=\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow eigen \quad values = \begin{bmatrix} 0.1802 \\ -0.1442 \\ -0.0360 \\ 0.1802 \\ -0.1442 \\ -0.0360 \end{bmatrix} \tag{38}$$

و همچنین

$$\begin{bmatrix} -0.1051 & 0 & -0.0688 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0150 & 0 & -0.1007 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0688 & 0 & 0.0451 & 0 & -0.1163 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1007 & 0 & 0.0751 & 0 & -0.1163 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1163 & 0 & 0.0751 & 0 & -0.1007 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.1163 & 0 & 0.0451 & 0 & -0.0688 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1007 & 0 & -0.0150 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0688 & 0 & -01051 \end{bmatrix} \quad l=3 \,\&\, j=\frac{7}{2} \,\&\, \gamma=\frac{\pi}{3}$$

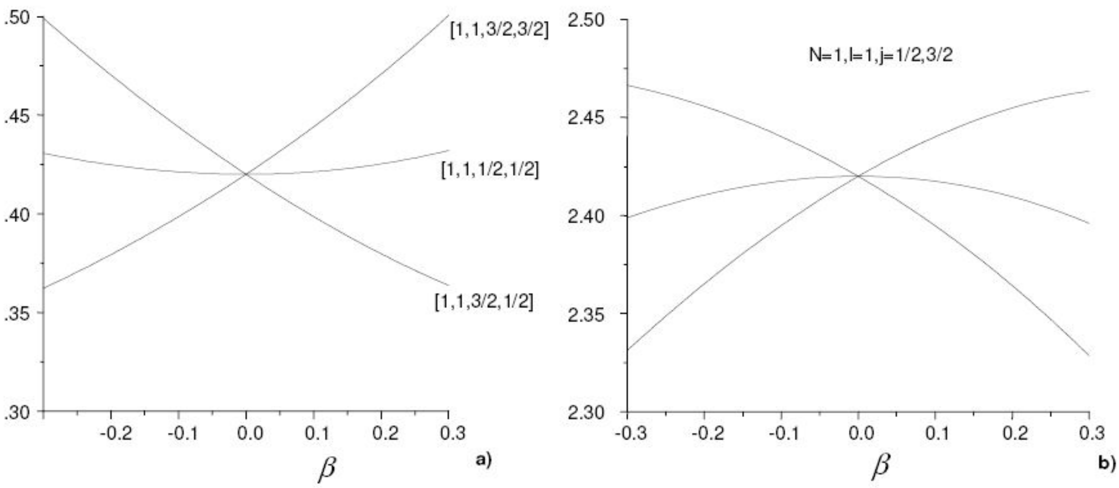
$$\Rightarrow eigen \quad values = \begin{bmatrix} 0.0300 \\ 0.2103 \\ -0.0901 \\ -0.1502 \\ 0.0300 \\ 0.2103 \\ -0.0901 \\ -0.1502 \end{bmatrix} \tag{39}$$

براي مقايسه مدل سه محوري با مدل نيلسون مي توان به ازاي مقادير مختلف $(\gamma \neq 0)$ ويژه مقادير انرژي را برحسب پارامتر تغيير شكل β رسم كرد و آنها را با نمودارهاي انرژي مدل نيلسون مقايسه نمود . البته در مدل نيلسون به ازاي مقادير مشخص N, l, j تعداد $(2j+1)$ ويژه حالت داريم كه اين تعداد ويژه حالت داراي تعداد $\frac{1}{2}(2j+1)$ انرژي هستند و يا به عبارت ديگر تعداد $\frac{1}{2}(2j+1)$ ويژه حالت با واگني دوگانه خواهيم داشت به طوريكه ويژه حالتها با ويژه مقدار متقارن j_z داراي انرژي يكسان خواهند بود يعني :

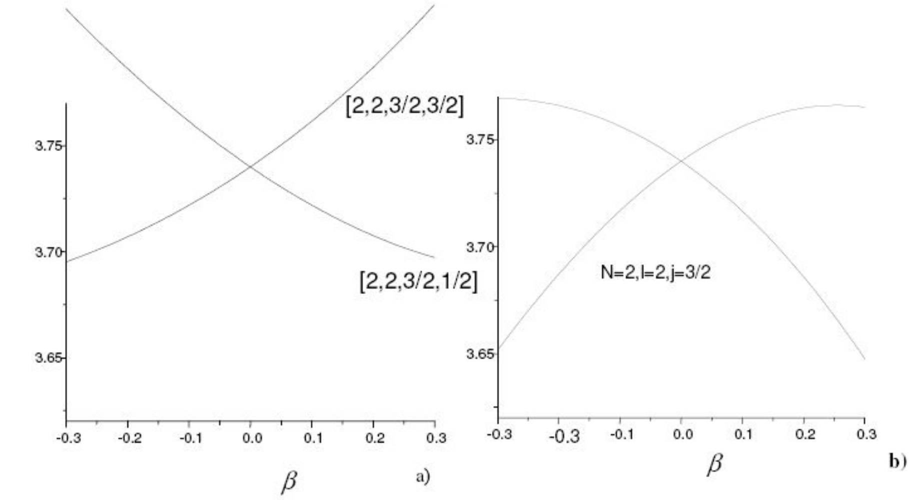
$$H_{Nilsson}\left|N,l,j,\Omega\right\rangle = H_{Nilsson}\left|N,l,j,-\Omega\right\rangle \qquad (40)$$

براي هاميلتوني تغيير شكل يافته سه محوري , با توجه به باز شكسته شدن تقارن نسبت به هاميلتوني نيلسون , انتظار مي رود كه ديگر همان واگني دوگانه هاميلتوني نيلسون (40) لزوما وجود نداشته باشد . اما پس از بررسي معادله (20) مشاهده مي شود كه قسمت اختلالي اين هاميلتوني نسبت به تبديل $(\theta,\phi)\rightarrow(\theta-\pi,\pi+\phi)$ ناورداست ، به همين دليل ويژه مقادير جمله اختلالي متقارن است .همچنين ويژه حالتهاي قسمت اختلالي در مدل تغيير شكل يافته سه محوري تركيبي از ويژه حالتهاي مدل لايه اي هسته طبق معادله (2) است .

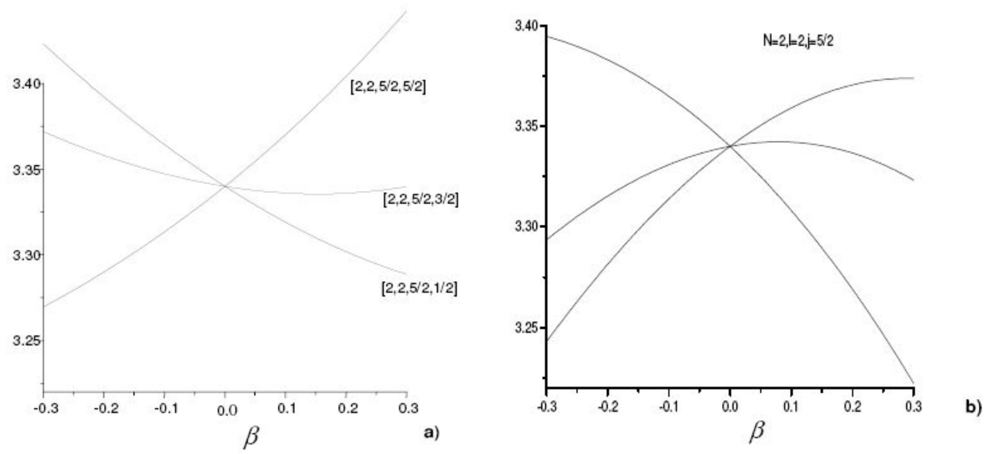
در شكلهاي شماره يك تا پنج براي قسمت مربوط به هاميلتوني نيلسون از نمادگذاري $[N,l,j,\Omega]$ استفاده كرده ايم و براي ترازهاي مدل تغيير شكل يافته سه محوري مقدار $\gamma=60^0$ در نظر گرفته شده است . ما براي محاسبه جمله اختلالي درمدل تغيير شكل يافته سه محوري يك برنامه كامپيوتري كه قابليت محاسبه را براي مقادير مختلف N,l,j دارد نوشته ايم .



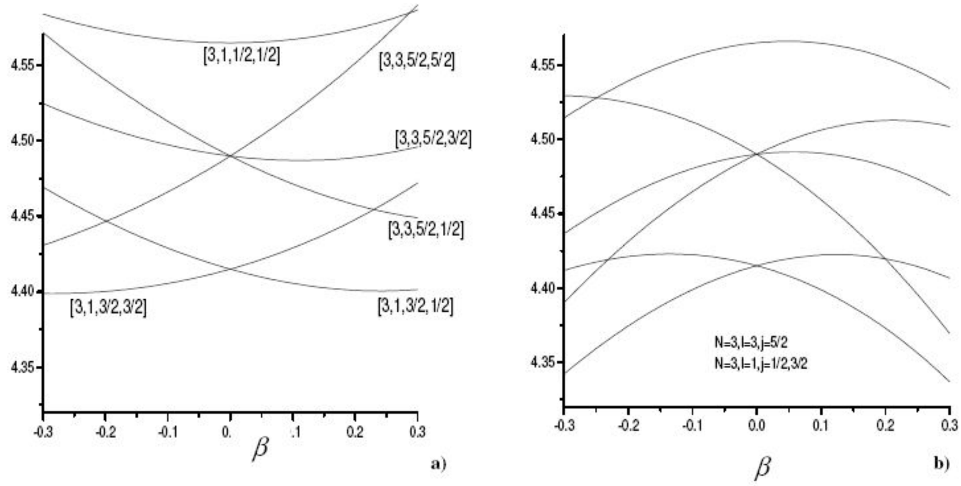
شكل 1. ترازهاي مختلف انرژي به واحد $\hbar\varpi_0$ برحسب پارامتر تغيير شكل β : $a)$ مدل نيلسون $N=1, l=1, j=\frac{1}{2},\frac{3}{2}$ و $b)$ مدل تغيير شكل يافته سه محوري $N=1, l=1, j=\frac{1}{2},\frac{3}{2}$



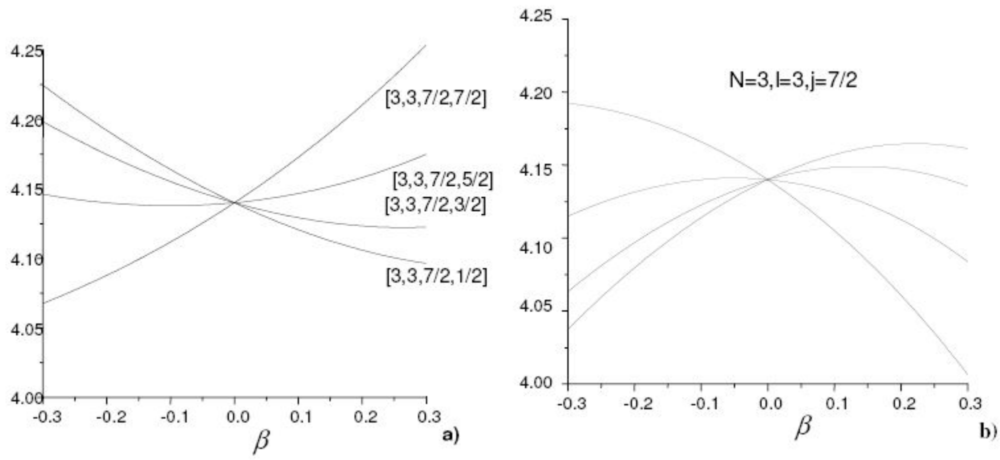
شکل 2. ترازهاي مختلف انرژي به واحد $\hbar\varpi_0$ برحسب پارامتر تغيير شکل β : $a)$ مدل نيلسون $N=2, l=2, j=\frac{3}{2}$ و $b)$ مدل تغيير شکل يافته سه محوري $N=2, l=2, j=\frac{3}{2}$



شکل 3. ترازهاي مختلف انرژي به واحد $\hbar\varpi_0$ برحسب پارامتر تغيير شکل β : $a)$ مدل نيلسون $N=2, l=2, j=\frac{5}{2}$ و $b)$ مدل تغيير شکل يافته سه محوري $N=2, l=2, j=\frac{5}{2}$



شکل 4. ترازهاي مختلف انرژي به واحد $\hbar\varpi_0$ برحسب پارامتر تغيير شكل β : a) مدل نيلسون $N=3, l=1,3, j=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2}$ و b) مدل تغيير شكل يافته سه محوري $N=3, l=1,3, j=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2}$



شکل 5. ترازهاي مختلف انرژي به واحد $\hbar\varpi_0$ برحسب پارامتر تغيير شكل β : a) مدل نيلسون $N=3, l=3, j=\frac{7}{2}$ و b) مدل تغيير شكل يافته سه محوري $N=3, l=3, j=\frac{7}{2}$

نتيجه گيري

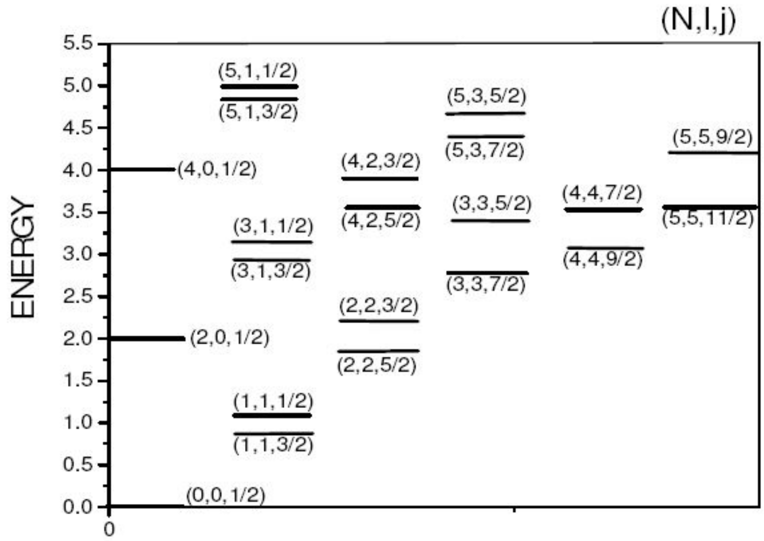
در پتانسيل نيلسون با در نظر گرفتن يك تغيير شكل هسته , كه ميزان اين تغيير شكل با پارامتر β تعيين مي شود , هسته را بصورت بيضويي با كشيدگي يا پختي در راستاي محور z در نظرمي گيريم. بطوريكه سطح مقطع هاي موازي صفحه xy اين

بيضوي دايره هستند . اما در مدل تغيير شكل يافته سه محوري سطح مقطع هاي اين بيضوي ديگر دايره نيستند بلكه بيضي شكل مي باشند . با توجه به اين تفاوت در شكل هسته انتظار مي رود كه به ازاي تغيير شكل صفر $(\beta = 0)$ ترازهاي انرژي مدلهاي نيلسون و مدل تغيير شكل يافته سه محوري باهم برابرباشند و ترازهاي انرژي مدل لايه اي هسته با همان هاميلتوني معادله (2) بدست آيند(شكل(6)) ، همچنين به ازاي $\gamma = 0$ مدل تغيير شكل يافته سه محوري و مدل نيلسون يكي مي شود. اين مطلب بوضوح در شكلها ديده مي شود .

نكته ديگر اين است كه ويژه توابع قسمت زاويه اي پتانسيل نيلسون به گونه ايست كه ويژه حالت همزمان عملگرهاي $\vec{j}^2, \vec{l}^2, \vec{s}^2, j_z$ مي باشند . اما ويژه توابع قسمت زاويه ا ي مدل تغيير شكل يافته سه محوري تركيبي از ويژه توابع پتانسيل نيلسون مي گردند .

نتيجه ديگر اين است كه به ازاي $\gamma = 60^0$ ماتريس مربوط به جمله اختلالي در مدل تغيير شكل يافته سه محوري با ز هم قطري نيست اما ويژه مقادير آن با ماتريس متناظر در پتانسيل نيلسون برابر مي باشد به عبارت ديگرداريم :

$$E(\beta, \gamma = 0^0) = -E(\beta, \gamma = 60^0)$$



شكل6. ترازهاي انرژي مدل لايه اي هاميلتوني معادله (2) به عنوان تابعي از N
(معادل $\beta = 0$ در مدل هاي نيلسون و تغيير شكل يافته سه محوري)

در حالت كلي به ازاي $\gamma = i\frac{\pi}{3}, i = 0,1,2,...$ در مورد هاميلتوني اختلالي $-\hbar\omega_0\beta\lambda R^2\left[Cos(\gamma)Y_{2,0} + \frac{Sin(\gamma)}{\sqrt{2}}(Y_{2,2} + Y_{2,-2})\right]$ داريم :

$E_{3-axial}(\beta,\gamma)=E_{Nilsson}(\beta)$

به نكته نيز اشاره مى شود كه براي مقادير $l=1,2\ \&\ j=\frac{3}{2}$, به علت اينكه هم براي پتانسيل نيلسون و هم براي مدل تغيير شكل يافته سه محوري , دو ويژه مقدارغير تكراري متناظربا ماتريس اختلال داريم , بنابراين در مدل تغيير شكل يافته سه محوري براي هر مقدار γ ويژه مقادير هر دو مدل مورد بحث باهم برابر مى شوند .

مراجع

1 A.Del Sol Mesa, G.Loyolat, M. Moshins Pey and V. Velazquez,"Quantum Groups and Recovery of U(3) Symmentary in the Hamiltonian of the nuclear Shell Model."
J.phys. A: M2th. Gen 26 (1993)1147

2 Y.K. Gambhir

Mean Field Description of Nuclie Copyright 2006 Narosa Pablishing House Pvt. Ltd. ISBN 81-7319-708-3

3 J.P. DRAAYER & K.T. WEEKS "Towards a Shell Model Description of the Low-Energy Structure of Deformed Nucli".
I. Even. Even systems.
Annals of physics 156,41-(1984)

4 Walter Greiner Greinernuclear Models– 1996. ,J. A.Mauhn
Speringer – Verlag. ISBN 3-540-59180-X