# عنوان : حل معادله دیفیوژن دو بعدی ، چند گروهی توسط روش المان محدود

نوید پورصالحی [1] – مجید شهریاری [1] – حسین خلفی [2] – عبدالحمید مینوچهر [1]
(۱) دانشگاه شهید بهشتی و (۲) پژوهشگاه علوم و فنون هسته ای

## چکیده:

به منظور طراحی یک راکتور هسته ای، لازم است نحوه رفتار جمعیت نوترون در راکتور و همچنین مقدار ضریب تکثیر موثر آن تعیین گردد. برای نیل به این هدف می توان معادله دیفیوژن نوترون که یک حالت خاصی از معادله ترابرد نوترون است، را حل کرد. برای حل عددی این معادله، معمولاً از دو روش اختلاف محدود و المان محدود استفاده می کنند.

در این مقاله، روش حل المان محدود برای حل معادله دیفیوژن در حالت چند گروهی و دو بعدی (x,y) ارائه می گردد. این روش بعلت انعطاف بیشتر در حل مسایل با اشکال هندسی نامنظم و دقت بالاتر با انتخاب تعداد تقسیم بندی بیشتر، معمولاً بر روش اختلاف محدود ترجیح داده می شود. برای حل معادله دیفیوژن، ناحیه مورد نظر به المانهای سه ضلعی (مثلثی) تقسیم شده و سپس با توجه به مشهای مرتبط با هر راس مثلث، ماتریس ضرایب شار ساخته می شود. درپایان این مقاله، نتایج این کد با کد محاسباتی *Citation* مقایسه گردیده است. با توجه به نتایج بدست آمده، در اغلب نمونه ها و با تعداد مش برابر، کد ارائه شده نتیجه دقیقتری بدست می دهد. همچنین با افزایش تعداد تقسیم بندی، جواب هردو کد دقیق تر خواهد شد. البته این نتایج برای کد ارائه شده، زمانی محسوس خواهد بود که افزایش تعداد تقسیم بندی بیشتر در ناحیه های شکافت پذیر صورت گیرد.

## مقدمه:

مطالعه و طراحی راکتورهای هسته ای مستلزم آگاهی از نحوه توزیع شار نوترون وابسته به مکان، انرژی، جهت و زمان در قلب راکتور می باشد. این توزیع با استفاده از حل معادله ترابرد نوترون بدست می آید. معادله اساسی که توزیع جمعیت نوترونی در یک محیط را ارائه می کند از طریق انجام موازنه نوترون بر روی واکنشهای مختلف نوترون از قبیل تولید، فرار و جذب در یک المان حاصل می گردد.

برای بدست آوردن شار نوترون در راکتورهای هسته ای، بجای حل معادله ترابرد نوترون، معمولا معادله دیفیوژن نوترون را که حالت خاصی از معادله ترابرد نوترون است، حل می کنند.

برای حل معادله دیفیوژن نوترون روشهای مختلفی وجود دارد، یکی از این روشها روش عناصر محدود می باشد که لازمه آن تقسیم کردن ناحیه مورد نظر به المان های کوچکتر است تا بتوانیم در هر المان از تقریبهایی استفاده کنیم. در کد ارائه شده، به منظور تقسیم بندی ناحیه ها، از المانهای مثلثی استفاده می گردد و این کد قابلیت حل معادله در صفحه دو بعدی با ابعاد مستطیلی را داراست.

روش عناصر محدود یک روش جاافتاده در ریاضیات کاربردی و مهندسی می باشد که در اکثر موارد به روش تفاضل محدود ترجیح داده می شود، علت این امر، انعطاف پذیری این روش در حل مسایل با اشکال

هندسی نامنظم و همگرایی سریعتر و دقت بیشتر آن با استفاده از عناصر بالاتر است. همچنین در این روش به متوسط گیری سطوح مقاطع، در مرز بین دو محیط نیاز نداریم.

اولین کاربرد روش عناصر محدود در زمینه مهندسی سازه بود که به سال ۱۹۵۶ بر می گردد و همچنین آقای Lewis در مقاله ای در سال ۱۹۸۱ کاربرد روش عناصر محدود در زمینه حل معادله دیفیوژن نوترون و نیز حل معادله ترابرد نوترون به روش پاریته زوج را شرح داده است. از این روش برای حل معادله دیفیوژن توسط روش ترکیبی (المان مرزی و المان محدود) نیز استفاده گردیده است[5].

در ادامه مقاله، علاوه بر توضیح روش حل معادله دیفیوژن چند گروهی- دو بعدی (در مختصات x,y) توسط روش المان محدود- ریتز ، نتایج با کد محاسباتی Citation مقایسه گردیده است.

## روش حل:

معادله دیفیوژن نوترون در حالت چند گروهی به صورت (۱) می باشد (در حالت یک بعدی و با فرض اینکه چشمه ثابت نداریم)[5] :

$$-D_g\nabla^2\phi_g(x)+\Sigma_{tg}\phi(x)=\frac{\chi_g}{k}\sum_{g'=1}^{G}\upsilon\Sigma_{fg'}\phi_{g'}(x)+\sum_{g'=1}^{G}\Sigma_{g\leftarrow g'}\phi_{g'}(x) \qquad g=1,2,3,\dots,G \qquad (۱)$$

در مختصات دو بعدی، معادله بصورت زیر بدست می آید:

$$-D_g\left(\frac{\partial^2\phi_g(x,y)}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2\phi_g(x,y)}{\partial^2 y}\right)+\Sigma_{tg}\phi(x,y)=\frac{\chi_g}{k}\sum_{g'=1}^{G}\upsilon\Sigma_{fg'}\phi_{g'}(x,y)+\sum_{g'=1}^{G}\Sigma_{g\leftarrow g'}\phi_{g'}(x,y) \qquad (۲)$$

حال داریم:

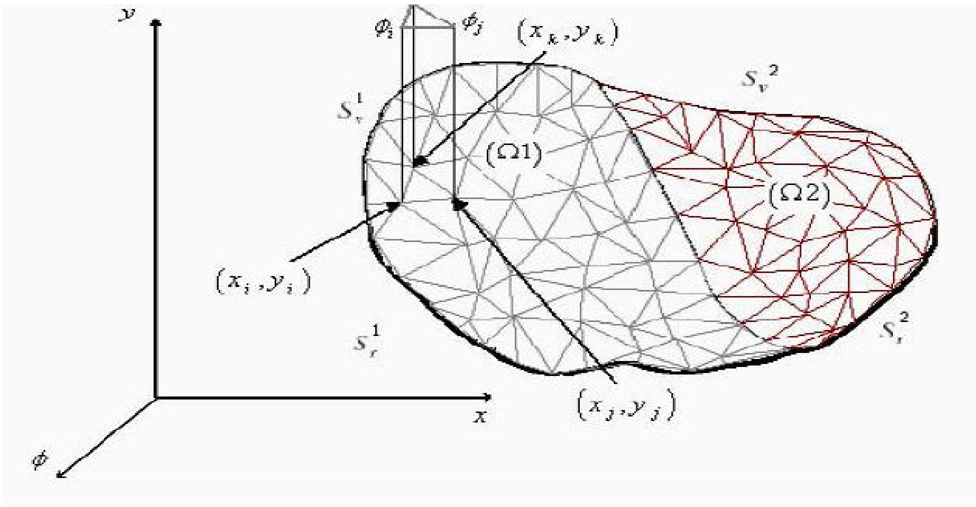
$$\Sigma_{Rg}=\Sigma_{tg}-\Sigma_{sgg} \qquad (۳)$$

پس معادله به صورت زیر بدست می آید:

$$-D_g\left(\frac{\partial^2\phi_g(x,y)}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2\phi_g(x,y)}{\partial^2 y}\right)+\Sigma_{Rg}\phi(x,y)=\frac{\chi_g}{k}\sum_{g'=1}^{G}\upsilon\Sigma_{fg'}\phi_{g'}(x,y)+\sum_{g'=1,g'\neq g}^{G}\Sigma_{g\leftarrow g'}\phi_{g'}(x,y) \qquad (۴)$$

برای حل معادله دیفیوژن در مختصات دو بعدی، لازم است که ابتدا ناحیه موردنظر را به المانهای کوچکتر تقسیم کنیم که این المانها می توانند سه ضلعی، چهار ضلعی و یا انواع دیگری باشند.

المانهای مورداستفاده در اینجا از نوع سه ضلعی درجه ۱ می باشند، شکل (۱) را در نظر بگیرید که به عناصر مثلثی تقسیم شده است.




شکل(۱) – تقسیم بندی یک ناحیه دلخواه با المانهای مثلثی

برای حل معادله (۴) با استفاده از روش المان محدود ، لازم است که ابتدا $\phi$ را در هر المان با یک چندجمله ای تقریب بزنیم. اگر این چند جمله ای درجه یک باشد، به آن تقریب خطی گفته می شود. در اینجا ازتقریب خطی استفاده می کنیم.

یکی از مثلثهای این صفحه (المان e) را در نظر بگیرید، تابع تقریبی که بتواند $\phi$ را درون مثلث تقریب بزند، به فرم (۵) است:

$$\hat{\phi}^{(e)}(x, y) = \beta_1^{(e)} + \beta_2^{(e)} x + \beta_3^{(e)} y \qquad (۵)$$

برای بدست آوردن $\beta_3^{(e)}, \beta_2^{(e)}, \beta_1^{(e)}$ مقدار $\phi$ را به ازای مختصات مربوطه اش جایگذاری می کنیم:

$$\phi_i = \beta_1^{(e)} + \beta_2^{(e)} x_i + \beta_3^{(e)} y_i \qquad (٦)$$

$$\phi_j = \beta_1^{(e)} + \beta_2^{(e)} x_j + \beta_3^{(e)} y_j \qquad (٧)$$

$$\phi_k = \beta_1^{(e)} + \beta_2^{(e)} x_k + \beta_3^{(e)} y_k \qquad (٨)$$

از حل سه معادله (٦) ، (٧) و (٨) نتیجه می شود :

$$\beta_1^{(e)} = \frac{\phi_i (x_j y_k - y_j x_k) + \phi_j (x_j y_i - y_j x_i) + \phi_k (x_i y_j - y_i x_j)}{2\Delta^{(e)}} \qquad (٩)$$

$$\beta_2^{(e)} = \frac{\phi_i (y_j - y_k) + \phi_j (y_k - y_i) + \phi_k (y_i - y_j)}{2\Delta^{(e)}} \qquad (١٠)$$

$$\beta_3^{(e)} = \frac{\phi_i\left(x_k - x_j\right) + \phi_j\left(x_i - x_k\right) + \phi_k\left(x_j - x_i\right)}{2\Delta^{(e)}} \qquad (۱۱)$$

$$2\Delta^{(e)} = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} \qquad (۱۲)$$

با جایگذاری $\beta^{(e)}$ ها در معادله (۵) داریم:

$$\hat{\phi}^{(e)}(x,y) = \frac{a_i + b_i x + c_i y}{2\Delta^{(e)}}\phi_i + \frac{a_j + b_j x + c_j y}{2\Delta^{(e)}}\phi_j + \frac{a_k + b_k x + c_k y}{2\Delta^{(e)}}\phi_k$$

که:

$$a_i = x_j y_k - y_j x_k \qquad b_i = y_j - y_k \qquad c_i = x_k - x_j \qquad (۱۳)$$

$$a_j = x_k y_i - y_k x_i \qquad b_j = y_k - y_i \qquad c_j = x_i - x_k \qquad (۱٤)$$

$$a_k = x_i y_j - y_i x_j \qquad b_k = y_i - y_j \qquad c_k = x_j - x_i \qquad (۱٥)$$

پس اگر تعریف کنیم:

$$N_n^{(e)}(x,y) = \frac{a_n + b_n x + c_n y}{2\Delta^{(e)}} \qquad n = i, j, k \qquad (۱٦)$$

می توان $\hat{\phi}(x,y)$ در هر المان را بصورت (۱۷) نوشت:

$$\hat{\phi}^{(e)}(x,y) = N_i^{(e)}\phi_i + N_j^{(e)}\phi_j + N_k^{(e)}\phi_k = \underline{N}^{(e)T}\underline{\phi}^{(e)} \qquad (۱۷)$$

که بردار N در هر المان با توجه به شماره گره های المان و مختصات آنها معلوم می باشد.
از روش المان محدود- ریتز ، داریم (با فرض وجود چشمه ):

$$\frac{\partial I^{(e)}}{\partial \phi_i^{(e)}} = \sum_{j=1}^{3}\phi_j^{(e)} \iint_{\Lambda}\left[D\frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x}.\frac{\partial N_j^{(e)}}{\partial x} + D\frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial y}.\frac{\partial N_j^{(e)}}{\partial y} + \Sigma_R N_i^{(e)}.N_j^{(e)}\right]d\Lambda - \iint R.N_i^{(e)}d\Lambda \qquad (۱۸)$$
$$(i, j = 1,2,3)$$

اگر تعداد M المان داشته باشیم:

$$\sum_{e=1}^{M}\frac{\partial I^{(e)}}{\partial \phi^{(e)}} = \sum_{e=1}^{M}([K^{(e)}][\phi^{(e)}] - [F^{(e)}]) = 0 \qquad (۱۹)$$

که داریم:

$$K_{ij}^{(e)} = \iint_{\Lambda} \left[ D \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_j^{(e)}}{\partial x} + D \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_j^{(e)}}{\partial y} + \Sigma_R N_i^{(e)} . N_j^{(e)} \right] d\Lambda \qquad (i,j=1,2,3) \qquad (۲۰)$$

و

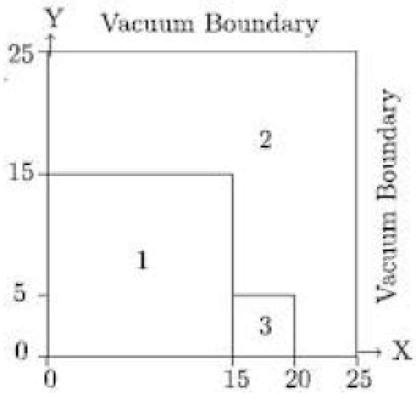
$$F_i^{(e)} = \iint_{\Lambda} R.N_i^{(e)} d\Lambda \qquad (i=1,2,3) \qquad (۲۱)$$

حال برای هر مش مثلثی در سطح مورد نظر، و با داشتن مختصات سه راس هر مثلث، برای هر مش روابط (۲۰) و (۲۱) را بدست می آوریم. سپس با توجه به مشهای درگیر در هر راس، روابط بالا را اسمبل کرده و رابطه نهایی زیر را بدست می اوریم.

$$K\phi = F \qquad (۲۲)$$

که توسط روش Power Method ، ضریب تکثیر و شار نهایی معادله (۲۲) بدست می آید. برای شرایط مرزی حل این معادله، شرط خلاء ( $\phi = 0$ ) در نظر گرفته شده است.

**نتایج**: برای بررسی دقت روش بکار رفته، حل معادله دیفیوژن برای یک مساله نمونه بررسی شده است. شکل (۲)، هندسه مساله را نشان می دهد. ثوابت گروهی مختلف در جدول (۱) آمده است.



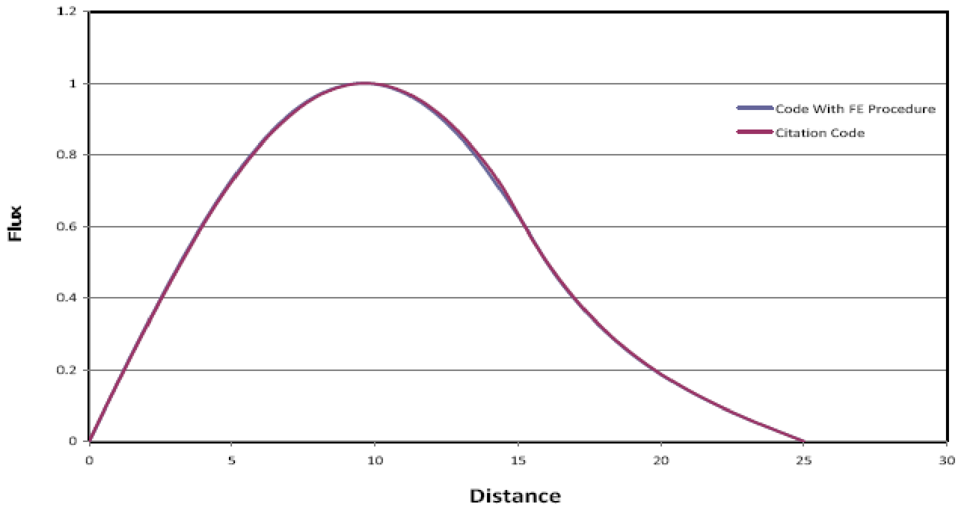

شکل (۲)

جدول (۱) – ثوابت گروهی نواحی مختلف

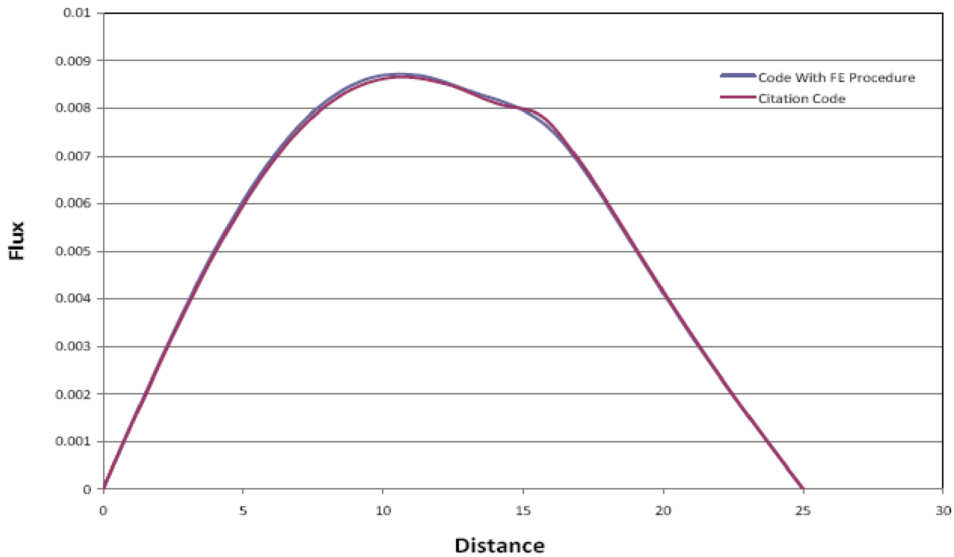
| گروه ۱ | ناحیه ۱ | ناحیه ۲ | ناحیه ۳ |
|---|---|---|---|
| $D$ | 1 | 0.85 | 0.9 |
| $\Sigma_R$ | 0.031 | 0.022 | 0.033 |
| $\upsilon\Sigma_f$ | 0.083 | 0 | 0 |
| $\Sigma_{1\to 2}$ | 0.001 | 0.002 | 0.003 |

| گروه۲ | ناحیه ۱ | ناحیه ۲ | ناحیه ۳ |
|---|---|---|---|
| $D$ | 1 | 0.85 | 0.9 |
| $\Sigma_R$ | 0.08 | 0.08 | 0.08 |
| $\upsilon\Sigma_f$ | 0.09 | 0 | 0 |

نتایج بدست آمده برای شار گروههای نوترون سریع و حرارتی به ازای y =10 cm در شکل (۳) و (٤) دیده می شود:




شکل (۳) – توزیع شار سریع در y =10 cm بر حسب x




شکل (٤) – توزیع شار حرارتی در y =10 cm بر حسب x

همچنین مقدار ضریب تکثیر با استفاده از کد المان محدود و *Citation* محاسبه شده است. مقادیر بدست آمده به قرار زیر می باشد:

المان محدود : $K_{eff} = 0.999860$

*Citation* : $K_{eff} = 1.002185$

## نتیجه گیری و پیشنهادات :

تعداد مشها در اجراء این دو کد یکسان می باشد. حال در صورتی که تعداد تقسیم بندی ناحیه ها در کد Citation سه برابر گردد، جواب بصورت $K_{eff} = 0.995361$ خواهد بود. می توان نتیجه گرفت که در تعداد مش مساوی در هردو کد، جواب کد ارائه شده به جواب $K_{eff} = 0.995361$ نزدیکتر بوده و بنابراین در نتیجه دقیقتر می باشد. البته این نتیجه و همچنین افزایش دقت بر اثر افزایش مشها، زمانی باعث بالاتر رفتن محسوس دقت در جواب می گردد که این افزایش مش بیشتر در محیط شکافت پذیر صورت گیرد. ولی در هر صورت با بالاتر رفتن تعداد تقسیمات در اجراء کد ارائه شده، بالا رفتن نسبی دقت را مشاهده می کنیم. بعلت نیاز به حافظه بالا در اجرای این کد، در صورت استفاده از روشهای عددی خاص و برنامه نویسی بهینه، می توان این کد را برای تعداد مشهای بالاتر اجراء کرد.

## مراجع:

[1].S. Cavdar, H.A. Ozgener (2004), A finite element/boundary element hybrid method for 2-D neutron di.usion calculations, Annals of Nuclear Energy 31 (2004) 1555–1582.

[2]. A.F.Henry, (1975), "Nuclear Reactor Analysis", Van Nostrand Reinhold, New York.

[3]. J.J.Dudestadt and L.J Hamilton (1941), "Nuclear Reactor Analysis",John Wiley, New York.

[4].G.I Bell Gladstone (1970), "Nuclear Reactor Theory",Van Nostrand Reinhold, New York.

[5] . حل معادله دیفیوژن دو بعدی توسط روش ترکیبی المان مرزی و المان محدود- آقایان وفایی زاده و دکتر عبدالحمید مینوچهر- دانشگاه شهید بهشتی- سال ۱۳۸۵.