# استفاده از اصل تغییر پذیری $K^{+}(\varphi^{+})$ و روش اجزاء محدود برای حل معادله ترابرد نوترون

احمدرضاذوالفقاری [۱] – محمدرضاعباسی [۲]- احمد حقیقت طلب [۳]
*۱-۲-۳- دانشگاه شهید بهشتی – دانشکده مهندسی هسته ای*

**چکیده**

در محیطهایی که تغییرات شار وابستگی شدیدی به جهت و مکان دارد نمی توان از روشهایی مانند معادله پخش استفاده نمود. در این مقاله جهت حل معادله ترابرد نوترون از اصل تغییرپذیری $K^{+}(\varphi^{+})$ استفاده شده است. در این اصل از بسط هارمونیک های کروی برای وابستگی زاویه ای شار و از روش اجزای محدود برای بخش مکانی معادله ترابرد استفاده شده است. در بدست آوردن $K^{+}(\varphi^{+})$ از روش تعمیم یافته مجذور مربعات خطا استفاده شده است که در متن مقاله به آن اشاره شده است. با توجه به ماهیت استفاده از روش تعمیم یافته مربعات خطا، اعمال شرایط مرزی در مسئله بسیار سهل می باشد و مشکلات استفاده از روش مستقیم $P_N$ را ندارد.

## ۱. معادله ترابرد در قالب پاریته زوج

کمیت‌های شار زاویه ای با پاریتهٔ زوج[۱۴] و شار زاویه ای با پاریتهٔ فرد[1,2,5]را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$\varphi_0^{+}(r,\Omega)=\frac{1}{2}[\varphi_0(r,\Omega)+\varphi_0(r,-\Omega)]=\varphi_0^{+}(r,-\Omega) \qquad (۱)$$

$$\varphi_0^{-}(r,\Omega)=\frac{1}{2}[\varphi_0(r,\Omega)-\varphi_0(r,-\Omega)]=-\varphi_0^{-}(r,-\Omega) \qquad (۲)$$

مفهوم پاریتهٔ زوج و فرد را می توان برای $S(r,\Omega)$ و سطح مقطع پراکندگی نیز بکارگرفت:

$$S^{+}(r,\Omega)=\frac{1}{2}[S(r,\Omega)+S(r,-\Omega)]=S^{+}(r,-\Omega) \qquad (۳)$$

$$S^{-}(r,\Omega)=\frac{1}{2}[S(r,\Omega)-S(r,-\Omega)]=-S^{-}(r,-\Omega) \qquad (۴)$$

$$\Sigma_s^{+}(r,\Omega\cdot\Omega')=\frac{1}{2}[\Sigma_s(r,\Omega\cdot\Omega')+\Sigma_s(r,-\Omega\cdot\Omega')]=\Sigma_s^{+}(r,-\Omega\cdot\Omega') \qquad (۵)$$

$$\Sigma_s^{-}(r,\Omega\cdot\Omega')=\frac{1}{2}[\Sigma_s(r,\Omega\cdot\Omega')-\Sigma_s(r,-\Omega\cdot\Omega')]=-\Sigma_s^{-}(r,-\Omega\cdot\Omega') \qquad (۶)$$

با توجه به اینکه در بسیاری از محاسبات $\varphi_0(r)$ مورد توجه است لذا با توجه به تعاریف فوق می‌توان نشان داد که:

$$\varphi_0(r)=\int\varphi_0(r,\Omega)d\Omega=\int\varphi_0^{+}(r,\Omega)d\Omega \qquad (۷)$$

$$\varphi_0(r,\Omega)=\varphi_0^{+}(r,\Omega)+\varphi_0^{-}(r,\Omega) \qquad (۸)$$

معادلات فوق ناشی از فرد بودن $\varphi_0^{-}(r,\Omega)$ نسبت به $\Omega$ می‌باشد. می توان نشان داد که اگر $\varphi_0(r,\Omega)$ برحسب هارمونیک های کروی بسط داده شود در آنصورت تعداد هارمونیک‌های کروی لازم بسط $P_{2N+1}$ کمیت $\varphi_0(r,\Omega)$ بیشتر از تعداد هارمونیک های کروی لازم بسط $P_{2N+1}$ برای $\varphi_0^{+}(r,\Omega)$ و $\varphi_0^{-}(r,\Omega)$ خواهد بود. این مزیت یکی از

[14] *Even Parity Angular Flux*

علل گرایش به استفاده از $\varphi_0^+(r,\Omega)$ و یا $\varphi_0^-(r,\Omega)$ می باشد. معادله ترابرد وابسته به مکان و یک گروهی نوترون در حالت ایستا را می توان به صورت زیر نوشت[3,4] :

$$\vec{\Omega}\cdot\vec{\nabla}\varphi_0(r,\Omega)+\Sigma_t(r)\varphi_0(r,\Omega)=\int d\Omega'\Sigma_s(r,\Omega\cdot\Omega')\varphi_0(r,\Omega')+S(r,\Omega) \qquad (۹)$$

با توجه به تعاریف فوق می توان معادلهٔ ترابرد نوترون را در راستای $-\Omega$ نیز نوشت.

$$-\vec{\Omega}.\vec{\nabla}\varphi_0(r,-\Omega)+\Sigma_t(r)\varphi_0(r,-\Omega)=\int_{4\pi}\Sigma_s(r,-\Omega.\Omega')\varphi_0(r,\Omega')d\Omega'+S(r,-\Omega) \qquad (۱۰)$$

پس معادلات (۹) و (۱۰) به صورت زیر تبدیل می‌گردد:

$$\vec{\Omega}.\vec{\nabla}\varphi_0^-(r,\Omega)+C\varphi_0^+(r,\Omega)=S^+(r,\Omega) \qquad (۱۱)$$

$$\vec{\Omega}.\vec{\nabla}\varphi_0^+(r,\Omega)+G^{-1}\varphi_0^-(r,\Omega)=S^-(r,\Omega) \qquad (۱۲)$$

اپراتورهای C و $G^{-1}$ برای یک تابع اختیاری $u(r,\Omega)$ به صورت زیرتعریف می شوند:

$$Cu(r,\Omega)=\Sigma_t(r)u(r,\Omega)-\int_{4\pi}\Sigma_s^+(r,\Omega.\Omega')u(r,\Omega')d\Omega' \qquad (۱۳)$$

$$G^{-1}u(r,\Omega)=\Sigma_t(r)u(r,\Omega)-\int_{4\pi}\Sigma_s^-(r,\Omega.\Omega')u(r,\Omega')d\Omega' \qquad (۱۴)$$

همچنین با توجه به معادله (۱۲) می توان $\varphi_0^-$ را بر حسب $\varphi_0^+$ به صورت زیر نوشت :

$$\varphi_0^-=G[S^--\vec{\Omega}\cdot\vec{\nabla}\varphi_0^+] \qquad (۱۵)$$

## ۲. روش کلی استفاده از حداقل مربعات برای معرفی اصل تغییر پذیری

اگر در معادلهٔ $\varphi_0=\varphi_0^++\varphi_0^-$ به جای $\varphi_0^+$ از تقریب $\varphi^+$ استفاده کنیم در آن صورت $\varphi_0=\varphi^++\varphi_0^-$ خواهد شد. اگر این رابطه را در معادلات (۱۱) و (۱۲) جایگزین کنیم به معادلات زیر می رسیم :

$$\vec{\Omega}.\vec{\nabla}\varphi_0^-(r,\Omega)+C\varphi^+(r,\Omega)=S^+(r,\Omega)+R^+(\varphi^+,\varphi_0^-) \qquad (۱۶)$$

$$\vec{\Omega}.\vec{\nabla}\varphi^+(r,\Omega)+G^{-1}\varphi_0^-(r,\Omega)=S^-(r,\Omega)+R^-(\varphi^+,\varphi_0^-) \qquad (۱۷)$$

که در معادلهٔ فوق $R^+$ و $R^-$ خطای ناشی از جایگزینی $\varphi^+$ به جای $\varphi_0^+$ می باشد و وجود این خطاها سبب می‌شود تساوی های (۱۶) و (۱۷) برقرار باشند. جایگزینی $\varphi^+$ به جای $\varphi_0^+$ خطاهائی را به دنبال دارد که عبارتند از:

الف) ایجاد خطا در معادلهٔ ترابرد و در داخل حجم V که آنرا به $\in_v(\varphi^+)$ نمایش می دهیم . با توجه به معادلات (۱۱) و (۱۲) و مقداری کار ریاضی می توان مقدار این خطا را به صورت زیر محاسبه نمود :

$$\begin{aligned}&\int_v\int_{4\pi}\{2\varphi^+S^++2S^-G\vec{\Omega}\cdot\vec{\nabla}\varphi^+-\vec{\Omega}\cdot\vec{\nabla}\varphi^+G\vec{\Omega}\cdot\vec{\nabla}\varphi^+-\varphi^+C\varphi^+\}d\Omega dV\\&+\in_v(\varphi^+)-4\int_{\partial v}\int_{\vec{\pi}.\vec{n}<0}\vec{\Omega}\cdot\vec{n}\{\varphi^+\{T(r,\Omega)-\varphi_0^+(r,\Omega)\}d\Omega dS \qquad (۱۸)\\&=\int_v\int_{4\pi}\{S^+C^-S^++S^-GS^-+\vec{\Omega}\cdot\vec{\nabla}\varphi_0^-C^{-1}\vec{\Omega}\cdot\vec{\nabla}\varphi_0^-+\varphi_0^-G^{-1}\varphi_0^--2\varphi_0^-S^--2S^+C^{-1}\vec{\Omega}\cdot\vec{\nabla}\varphi_0^-\}d\Omega dV\end{aligned}$$

ب ) ایجاد خطا به خاطر عدم ارضای شرایط مرزی به علت وجود اختلاف بین $\varphi^+$ و $\varphi_0^+$ که آنرا به $\in_{\partial v}(\varphi^+)$ نمایش می دهیم . با اعمال شرایط مرزی روی معادلات (۱۱) و (۱۲) می توان مقدار این خطا را نیز به صورت زیر بدست آورد :

$$\in_{\partial v}(\varphi^+) - 2\int_{\partial v}\int_{\vec{\Omega}.\vec{n}<0}\left|\vec{\Omega}.\vec{n}\right|\{\varphi^+(r,\Omega)^2 + \varphi_0^+(r,\Omega)^2 - 2\varphi^+(r,\Omega)\varphi_0^+(r,\Omega)\}d\Omega dS = 0 \qquad (۱۹)$$

اگر خطای روی سطح یعنی $\in_{\partial v}(\varphi^+)$ را با خطای داخل حجم $\in_v(\varphi^+)$ جمع کنیم ، داریم:

$$\begin{aligned}&\int_v\int_{4\pi}\{2\varphi^+S^+ + 2S^-G\vec{\Omega}\cdot\vec{\nabla}\varphi^+ - \vec{\Omega}\vec{\nabla}\varphi^+G\vec{\Omega}\vec{\nabla}\varphi^+ - \varphi^+C\varphi^+\}d\Omega dV + \in_{\partial v}(\varphi^+) + \in_v(\varphi^+)\\&+4\int_{\partial v}\int_{\vec{\Omega}.\vec{n}<0}\left|\vec{\Omega}.\vec{n}\right|T\varphi^+d\Omega dS - \int_{\partial v}\int_{4\pi}\left|\vec{\Omega}.\vec{n}\right|\varphi^{+^2}d\Omega dS \qquad (۲۰)\\&= \int_v\int_{4\pi}\{S^+C^-S^+ + S^-GS^+ + \vec{\Omega}\cdot\vec{\nabla}\varphi_0^-C^{-1}\vec{\Omega}\vec{\nabla}\varphi_0^- + \varphi_0^-G^{-1}\varphi_0^- - 2\varphi_0^-S^- - 2S^+C^{-1}\vec{\Omega}\vec{\nabla}\varphi_0^-\}d\Omega dV + 2\int_{\partial v}\int_{\vec{\Omega}.\vec{n}<0}\left|\vec{\Omega}.\vec{n}\right|\varphi^{+^2}d\Omega dS\end{aligned}$$

از معادلهٔ فوق برای بدست آوردن اصل تغییر پذیری استفاده می شود. معادلهٔ (۲۰) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$k^+(\varphi^+) + \in_v^+(\varphi^+) + \in_{\partial v}^+(\varphi^+) = H^+(\varphi_0^+,\varphi_0^-,S^+,T) \qquad (۲۱)$$

که $K^+$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{aligned}K^+(\varphi^+) &= \int_v\int_{4\pi}\{2\varphi^+S^+ + 2\vec{\Omega}\cdot\vec{\nabla}\varphi^+GS^- - \vec{\Omega}\cdot\vec{\nabla}\varphi^+G\vec{\Omega}\cdot\vec{\nabla}\varphi^+ - \varphi^+C\varphi^+\}d\Omega dV\\&+4\int_{\partial v}\int_{\vec{\Omega}.\vec{n}<0}\left|\vec{\Omega}.\vec{n}\right|T\varphi^+d\Omega dS - \int_{\partial v}\int_{4\pi}\left|\vec{\Omega}.\vec{n}\right|\varphi^{+^2}d\Omega dS\end{aligned} \qquad (۲۲)$$

مشاهده می شود که سمت راست معادلهٔ (۲۱) یک مقدار ثابت می باشد و در سمت چپ معادله مقادیر $\in_v^+(\varphi^+)$ و $\in_{\partial v}^+(\varphi^+)$ هر یک مقادیر غیر منفی می باشند در نتیجه $K^+(\varphi^+) \le H^+(\varphi_0^+,\varphi_0^-,S^+,S^-,T)$ می باشد .

مجموع $\in_v^+(\varphi^+)$ و $\in_{\partial v}^+(\varphi^+)$ وقتی صفر می شود که $\varphi^+ = \varphi_0^+$ و اگر مجموع دو خطای فوق صفر شد می توان نتیجه گرفت که $\varphi^+ = \varphi_0^+$ است. یک تقریب خوب برای $\varphi_0^+$ وقتی حاصل می شود که $\in_v^+(\varphi^+) + \in_{\partial v}^+(\varphi^+)$ را بتوان نسبت به ضرائبی که $\varphi^+$ را تشکیل می دهند، به مقدار حداقل رساند به عبارت دیگراگر $K^+(\varphi^+)$ ماکزیمم شود در آن صورت شرط فوق ارضا می گردد.

## ۳. شرایط مرزی برای $\varphi_0^+(r,\Omega)$

معادله ترابرد را باید با توجه به شرایط مرزی حل نمود . . با توجه به ماهیت استفاده از روش تعمیم یافته مربعات خطا، اعمال شرایط مرزی در مسئله بسیار سهل می باشد بنابراین می توان شرایط مرزی برای $\varphi_0^+(r,\Omega)$ را بصورت زیر خلاصه نمود

الف) صفحهٔ برهنه و یا آزاد

$$\varphi_0^+(r,\Omega) + G[S^-(r,\Omega) - \vec{\Omega}\cdot\vec{\nabla}\varphi_0^+(r,\Omega)] = 0 \qquad \text{برای} \quad \vec{\Omega}.\vec{n} < 0$$

$$\varphi_0^+(r,\Omega) - G[S^-(r,\Omega) - \vec{\Omega}.\vec{\nabla}\varphi_0^+(r,\Omega)] = 0 \qquad \text{برای} \quad \vec{\Omega}.\vec{n} > 0$$

ب) سطوح بازتابندهٔ ایده آل

$$\varphi_0^+(r,\Omega) = \varphi_0^+(r,\Omega^*) \qquad \text{برای} \quad \vec{\Omega}.\vec{n} = -\vec{\Omega}^*.\vec{n} \neq 0$$

$$S^-(r,\Omega)-S^-(r,\Omega^*)-\vec{\Omega}\cdot\vec{\nabla}\varphi_0^+(r,\Omega)+\vec{\Omega}^*\cdot\vec{\nabla}\varphi_0^+(r,\Omega^*)=0$$

پ) چشمهٔ سطحی $T(r,\Omega)$ برای $\vec{\Omega}.\vec{n}>0$

$$\varphi_0^+(r,\Omega)+G[S^-(r,\Omega)-\vec{\Omega}.\vec{\nabla}\varphi_0^+(r,\Omega)]=T(r,\Omega)$$

برای $\vec{\Omega}.\vec{n}>0$

$$\varphi_0^+(r,\Omega)-G[S^-(r,\Omega)-\vec{\Omega}.\vec{\nabla}\varphi_0^+(r,\Omega)]=T(r,-\Omega)$$

ت) سطوح داخلی برای

$$\varphi_0^+(r_i,\Omega)=\varphi_0^+(r_j,\Omega)$$

$$G[\vec{\Omega}\cdot\vec{\nabla}\varphi_0^+(r_i,\Omega)-S^-(r_i,\Omega)]=G[\vec{\Omega}\cdot\vec{\nabla}\varphi_0^+(r_j,\vec{\Omega})-S^-(r_j,\vec{\Omega})]$$

## ۴. به کارگیری اصل $K^+(\varphi^+)$ برای تیغه یک بعدی

برای ماکزیمم کردن $K^+(\varphi^+)$ از روش اجزاء های محدود استفاده می کنیم و تابع تقریب $\varphi^+$ را به صورت زیر در نظر می گیریم :

$$\varphi^+(x,\mu)=\sum_{n=even}^{N-1}\frac{2n+1}{2}P_n(\mu)\Psi_n(x) \qquad (۲۳)$$

که در آن $P_n(\mu)$ توابع لژاندر بوده و $\psi_n(x)$ ضرائب وابسته به مکان می‌باشند.

معادلهٔ (۲۳) را می توان به صورت ماتریسی زیر نوشت:

$$\varphi^+(x,\mu)=Q^{+^T}(\mu)\Psi(x) \qquad (۲۴)$$

که $Q^{+^T}(\mu)$ و $\Psi(x)$ برابر است با:

$$Q^{+^T}(\mu)=[Q_1,Q_2....Q_n]=\left[\frac{1}{2}P_0(\mu),\frac{5}{2}P_2(\mu),\frac{9}{2}P_4(\mu),\cdots\cdots,\frac{2N-1}{2}P_{N-1}(\mu)\right] \qquad (۲۵)$$

$$\Psi_i^j(x)=\sum_{P=1}^{Ne}B_p^j(x)\Psi_{pi}^j \qquad n=0,2,\cdots,N-1 \qquad (N=odd) \qquad (۲۶)$$

که $B_p^j(x)$ توابع شکلی المان می باشند. مقدار $B_p^j(x)$ درگره مربوط به خود دارای مقدار یک بوده و به صورت خطی و یا تابع درجهٔ ۲ و یا... تا گره بعدی تغییر می کند تا اینکه در گره بعدی مقدار آن به صفر برسد . با توجه به مطالب قبل می توان معادلهٔ (۲۳) را به صورت زیر نوشت:

$$\varphi^+(x,\mu)=\sum_{j=1}^{E}B^{jT}(x)\otimes Q^{+T}(\mu)\Psi^j \qquad (۲۴)$$

$B^{jT}\otimes Q^{+T}$ که در آن معرف حاصل ضرب تانسوری و یا حاصلضرب مستقیم دو بردار $B^{jT}$ و $Q^{+T}$ می باشد. با جایگذاری این معادله در معادله (۲۲) و عملیات ریاضی می توان اجزای وابسته به زاویه و مکان را برای حالت تیغه یک بعدی بدست آورد . برای ماکزیمم کردن $K^+(\varphi^+)$ نسبت به $\Psi^T$ مشتق می گیریم وبرابر صفر قرار می دهیم ($\frac{\partial K^+(\varphi^+)}{\partial\Psi^T}=0$). با توجه به قرینه بودن ماتریس $\underline{A}^+$ داریم:

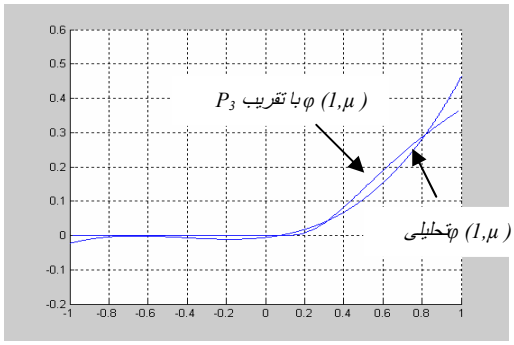
$$\frac{\partial(\Psi^T A^+\Psi)}{\partial\Psi^T}=2A^+\Psi \qquad \text{و} \qquad \frac{\partial(\Psi^T B)}{\partial\Psi^T}=B^+ \qquad (۲۵)$$

پس خواهیم داشت $A^+\Psi=B^+$ که در واقع معادلهٔ اصلی منجر به حل دستگاه جبری فوق می‌گردد .

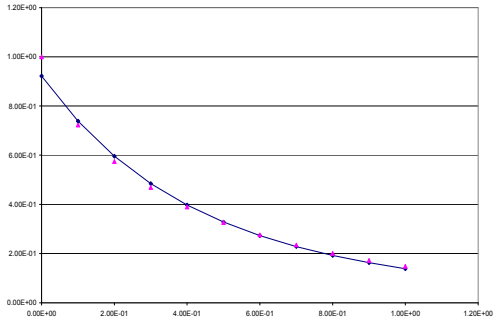
## ۵. مثال های عددی و نتایج

**مثال۱: چشمه یکنواخت سطحی در محیط جاذب کامل [1]**

تیغه ای به ضخامت $1\,cm$ از یک ماده جاذب کامل مورد نظر می باشد . مشخصات این تیغه $\Sigma_t = 1.00\,cm^{-1}$ , $\Sigma_s = 0.0$ می باشد .چشمه سطحی $T = 1.00\,\frac{n}{s.m^2}$ روی مرز این تیغه قرار دارد. توزیع شار داخل تیغه با استفاده از اصل تغییر پذیری به روش اجزاء محدود برای $P_3$ محاسبه شده است. توزیع مکانی شار اسکالر یا $\psi_0(x)$ با مقدار تحلیلی آن [3] در شکل ۱ مقایسه شده است . همچنین مقدار $\varphi(1,\mu)$ در $x = 1$ محاسبه شده و با مقدار تحلیلی $\varphi(1,\mu) = e^{1/\mu}$ آن در شکل ۲مقایسه شده است.



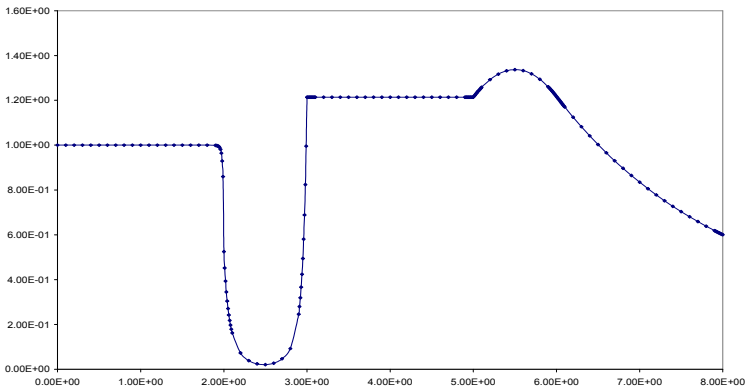

شکل ۲ : مقدار $\varphi(1,\mu)$



شکل ۱ : مقدار شار اسکالر $P_3$

**مثال ۲ : تست خلاء [6]**

این مسئله نشان دهنده یک سلول در لبه قلب یک راکتور هسته ای می باشد . مسئله شامل چشمه ای همسانگرد می باشد که به صورت غیریکنواخت در تیغه ای متشکل از پنج ناحیه توزیع شده است . شرط مرزی سمت چپ بازتابنده کامل و شرط مرزی سمت راست خلاء می باشد . مقدار شار نوترون با تقریب $P_7$ محاسبه شده و مقدار آن در شکل ۳ نشان داده شده است .



*شکل۳: نمودارشار اسکالرمربوط به تست خلاء* ($P_7$)

## فهرست مراجع :

[1]. *Ron T. Ackroyd (1997), "Finite Element Methods for Particle Transport Applications to Reactor and Radiation Physics".*

[2]. *C.R.E. de Oliveria (1987), "Finite Element Techniques for Multi group Neutron Transport Calculations with Anisotropic Scattering, Ph.D. Thesis.*

[3]. *A.F. Henry,(1975), "Nuclear Reactor Analysis", The MIT Press, Cambridge, Massachusetts.*

[4]. *G.I. Bell and S. Glasstone (1970), "Nuclear Reactor Theory", Van Nostrand Reinhold, New York.*

[5]. *A.R. Zolfaghari Daaryani (1998), "Multidimensional Finite Element Modeling of Thermal Radiation in Participating Media" , Ph.D. Thesis.*

[6]. *Anwar M. Mirza (1992), "Discontinuous Finite Element Formulation of the Neutron Transport Equation" , (MPhil to Ph.D. Transfer Report)*