قرارگیری سه نوکلئون درجعبه و تصحیحات نمايي

صادقی ،حسین؛ علیرضائی، نازنین
گروه فیزیک دانشگاه اراک
E-mail:H-Sadeghi@araku.ac.ir

چکیده

مشاهده پذیرهای پراکندگی در نظریه میدان شبکه ای با استفاده از اندازه گیری و ارتباط آن به بستگی حجمی ترازهای انرژی در حالت دوذره ای قابل محاسبه است. در این موارد می توان نشان داد که بستگی حجمی متناسب با عکس توان حجم بوده و واز روی شیفت فاز قابل محاسبه هستند. این رابطه عمومی، بین ترازهای انرژی و شیفت فاز فرمول لوسچر نامیده می شود. برای حجم های بزرگ تصحیحات به صورت نمایی کاهش یافته و محدودیتی را بر میزان کوچکی شبکه ایجاد می کنند. ما در این مقاله به بررسی سه نوکلئون در یک جعبه پرداخته و این تصحیحات را در مورد این سه نوکلئون تخمین می زنیم. سیستم سه نوکلئونی نزدیک نقطه ثابت مادون قرمز QCD و طولهای پراکندگی موج S، بصورت غیر طبیعی در مقایسه با پارامترهای برد موثر و شکل بزرگ هستند و معمولا" فرض می شود که برای بررسی آن بر روی شبکه، به شبکه ای بسیار بزرگتر از طول پراکندگی نیاز است.

واژه های کلیدی: نیروهای چهار جسمی ، جداسازی مقیاس، تبادل پایونی و پتانسیل چهار جسمی

مقدمه

در چند سال اخیر تلاش های زیادی Bedaque و همکارانش بمنظور بررسی و مطالعه اندرکنش های هسته ای با استفاده از نظریه شبکه ای QCD انجام پذیرفته است[1-6] . این تلاشها همه از یک سئوال به صورت زیر شروع می شوند:

کوچکترین اندازه ی شبکه ای که می توان یک، دو و سه نوکلئون را با کمترین خطا در آن قرار داد چقدر است؟ Bedaque و همکارانش در مورد یک و دو نوکلئون این سئوال را پاسخ داده اند و ما در این مقاله این مقاله به مسئله حضور سه نوکلئون درون یک جعبه پاسخ خواهیم داد .

به طور کلی محاسبات نظری میدان شبکه ای را با استفاده از زمان موهومی توان انجام داد که بدین ترتیب ا مانع از محاسبه ی دامنه پراکندگی در حجم نا محدود خواهد شد. روش معمول بررسی اطلاعات بدست آمده از دامنه های پراکندگی با تکنیک های شبکه ای است که از روی بستگی حجمی ترازهای انرژی ذرات که از روی شیفت فاز محاسبه می شود، استنتاج می شود. همانطور که بوضوح می دانیم ترازهای انرژی

سیستمهای چند ذره ای، بطور مثال سیستم دو ذره ای در مورد اندرکنشهای دافعه(جاذبه)به سمت بالا(پایین) شیفت می یابند که ناشی از اندرکنش ها بوده و در حجم نامحدود صفر خواهند شد. در اینجا می توان بستگی های حجمی را به دو دسته تقسیم کنیم:

الف– بستگی های قانون توانی که با $\frac{1}{L^3}$ متناسب است(Lطول جعبه است).

ب–سهم کاهش نمایی که با $e^{\frac{-L}{R}}$ متناسب می باشد(که در آن R برد اندرکنش می باشد)

بستگی قانون توانی به طور کامل با شیفت فاز کشسان در مورد انرژی به شکل معادله لوسچر بیان خواهد شد که به رابطه ای کلی منجر می شود. به بیانی دیگر می توان گفت که از نیروهای ما بین دو ذره مستقل است. در مورد شیفت فاز این بستگی تنها به مقدار انرژی ذره خواهد بود. اگر جعبه به اندازه کافی بزرگ باشد، بستگی قانون توانی غالب بوده و کاهش نمایی در آن را می توان نادیده گرفت. در این روش، جعبه ها را می توان به اندازه کافی بزرگ فرض نمود تا بتوان با استفاده از فرمول لوسچر، استنتاجهای شبکه ای از فاز شیفت داشت.

در این مقاله ما به بررسی فرمولبندی بمنظور قرار دادن سه نوکلئون درون یک جعبه می پردازیم. بدین منظور در فصل بعد به فرمولبندی دو و بررسی سه نوکلئون درون یک جعبه پرداخته و سپس در فصل آخر به نتایج این فرمولبندی خواهیم پرداخت.

فرمول بندی

ب– دو نوکلئون در یک جعبه

با رفتن از فضای پیوسته و نا محدود به جعبه ی محدود ، تغییراتی را در معادله لیپمن شوینگر خواهیم داشت [4]:

الف–اولاً :تکانه مجاز ذرات واسطه به مقادیر ناپیوسته $\vec{q} = 2\pi\vec{n}/L, \vec{n} \in \mathbb{Z}^3$ محدود می شود .

ب – تصویر کردن بر روی پاره موج ها غالباً پیچیده تر شده بطوریکه شکل جعبه ها، باعث شکست تقارن های چرخشی موجود خواهد شد.

بیشتر پاره موج ها ،هنگامی که پتانسیل وابسته به اسپین و تقارن کروی است، با دو علت باهم ترکیب می شوند. یکی اینکه بیشتر پاره موجها نقش کمی را در پراکندگی انرژی های پایین بازی می کنند یعنی بازاء k های کوچک $\delta_l(k) \sim k^{2l+1}$ ودیگری آنکه باعث قطع ترکیب پاره موجها با که تقریبا" بین هارمونیک های کروی در حجم های بزرگ، اما محدود متعامدند می شود. بدین علت، از ترکیب پاره موج ها را می توان صرفنظر کرد. در حجمی معین شبیه ماتریس T مربوط به معدله لیپمن شوئینگر می توان نوشت:

$$\mathbf{T}(p,k) = -MV(p,k) - \frac{1}{L^3}\sum_{\vec{q}=2\pi\vec{n}/L}\frac{MV(p,q)\mathbf{T}(q,k)}{q^2-k^2} \tag{۱}$$

در اینجا فرض می کنیم که مقدار k نمی تواند با یکی از مقادیر مجاز q منطبق باشد پس در اینجا نیازی به عملکرد عادی ساز در مخرج انتشارگر نخواهیم داشت ، که خود باعث آن می شود که ماتریس پراکندگی حجم محدود حقیقی شود. حال اگر در محور حقیقی دارای تکینگی نباشد و به سمت صفر در بینهایت میل کند، تفاوت بین جمع و انتگرال در L های بزرگ بصورت نمایی کوچک می شود. این نتیجه از فرمول جمع پواسن به شکل زیر بیان می شود [4]:

$$\begin{aligned}\frac{1}{L^3}\sum_{\vec{q}=2\pi\vec{n}/L} f(\vec{q}) &= \int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}f(\vec{q}) + \sum_{\vec{n}\neq 0,\vec{n}\in\mathbb{Z}^3}\int\frac{d^2q}{(2\pi)^3}f(\vec{q})e^{iL\vec{q}\cdot\vec{n}},\\ &= \int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}f(\vec{q}) + \mathcal{O}(e^{-mL}),\end{aligned} \tag{۲}$$

که در آن m مشخصه ی مقیاس تابع f می باشد. جمعوند در معادله (۲) حال دارای تکینگی در نقطه q=k می باشد. پس نمی توان از جمع پواسن به صورت مستقیم استفاده کرد. تکینگی منطبق بر پراکندگی روی پوسته را به شکل زیر جدا می کنیم:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(p,k) = -MV(p,k) &- \frac{1}{L^3}\sum_{\vec{q}=2\pi\vec{n}/L}\frac{MV(p,q)\mathbf{T}(q,k) - MV(p,k)\mathbf{T}(k,k)}{q^2-k^2}\\ &- MV(p,k)\mathbf{T}(k,k)\frac{1}{L^3}\sum_{\vec{q}=2\pi\vec{n}/L}\frac{1}{q^2-k^2}.\end{aligned} \tag{۳}$$

اولین جمعوند منظم شده است، حال می توانیم جمع را با انتگرال به شکل زیر جایگزین کنیم :

$$\begin{aligned}&\frac{M}{L^3}\sum_{\vec{q}=2\pi\vec{n}/L}\frac{V(p,q)\mathbf{T}(q,k)-V(p,k)\mathbf{T}(k,k)}{q^2-k^2}\\ &= M\,{}^{\mathcal{P}}\!\!\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{V(p,q)\mathbf{T}(q,k)}{q^2-k^2} - M\,{}^{\mathcal{P}}\!\!\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{V(p,k)\mathbf{T}(k,k)}{q^2-k^2} + \mathbf{F}(p,k)\end{aligned} \tag{۴}$$

با وجود تفاوت بین جمع و انتگرال $\mathbf{F}(p,k)$ یک کمیتی به شکل نمایی کوچک است .

$$\mathbf{F}(p,k) \equiv M\left(\frac{1}{L^3}\sum_{\vec{q}} - \int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\right)\frac{V(p,q)\mathbf{K}(q,k)-V(p,k)\mathbf{K}(k,k)}{k^2-q^2} \tag{۵}$$

انتگرالده در F منظم می باشد بنابراین با جمع پواسن در معادله (۵) داریم:

$$\mathbf{F}(p,k) = -M\sum_{\vec{n}\neq 0,\vec{n}\in\mathbb{Z}^3}\int_0^\infty\frac{dqq}{2\pi^2}\frac{\sin(|\vec{n}|qL)}{|\vec{n}|L}\frac{V(p,q)\mathbf{T}(q,k)-V(p,k)\mathbf{T}(k,k)}{q^2-k^2} \tag{۶}$$

دومین جمع در معادله (۳) شامل تصحیحات قانون توانی می باشد .جمع به تنهایی تابعی عمومی از k می باشد که وابسته از پتانسیل است. با تعریف زیر به آن معنا می دهیم:

$$\frac{1}{4\pi^2 L}\mathrm{S}\Big(\frac{k^2L^2}{4\pi^2}\Big) \equiv \Big(\frac{1}{L^3}\sum_{\vec{q}=2\pi\vec{n}/L} - \int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\Big)\frac{1}{q^2-k^2} \tag{۷}$$

بنابراین معادله ۱۲ را این چنین بازنویسی می کنیم:

$$\mathbf{T}(p,k) = -MV(p,k)\Big[1+\mathbf{T}(k,k)\frac{1}{4\pi^2 L}\mathrm{S}\Big(\frac{k^2L^2}{4\pi^2}\Big)\Big] - {}^{\mathcal{P}}\!\!\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{MV(p,q)\mathbf{T}(q,k)}{q^2-k^2} + \mathbf{F}(p,k) \tag{۸}$$

که دارای جواب زیر است:

$$\mathbf{T}(p,k) = -\Big[1+\mathbf{T}(k,k)\frac{1}{4\pi^2 L}\mathrm{S}\Big(\frac{k^2L^2}{4\pi^2}\Big)\Big]\mathbb{K}(p,k) \tag{۹}$$

که در آن $\mathbb{K}(p,k)$ و $\mathbb{F}(p,k)$ به شکل زیر تعریف می شوند[4]:

$$\mathbb{K}(p,k) = MV(p,k) - {}^{\mathcal{P}}\!\!\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{MV(p,q)\mathbb{K}(q,k)}{q^2-k^2} + \mathbb{F}(p,k)$$

و

$$\mathbb{F}(p,k) = -M\sum_{\vec{n}\neq 0,\vec{n}\in\mathbb{Z}^3}\int_0^\infty\frac{dqq}{2\pi^2}\frac{\sin(|\vec{n}|qL)}{|\vec{n}|L}\frac{V(p,q)\mathbb{K}(q,k)-V(p,k)\mathbb{K}(k,k)}{q^2-k^2}$$

ب- سه نوکلئون در یک جعبه

با توجه به شکل ماتریس T در حجم محدود برای دونوکلئون، می توان معادله فدیو را در مورد سیستمهای سه نوکلئونی از روی آن تعیین کرد. سه معادله جفت شده فدیو را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\psi_i \;=\; G_0 t_i \sum_{j\neq i}\psi_j \tag{۱۰}$$

که در آن t همان T و ψ ها همان مولفات فدیو می باشند که در معادله (۸) و (۱۲) بیان شد. با تعریف معادله فدیو در فضای مومنتوم و انتخاب مومنتومهای نسبی بین سه ذره با توجه به مختصات ژاکوبی داریم:

$$\psi = \; G_0\; t\; P\; \psi \tag{۱۱}$$

که G_0 انتشارگر آزاد است. بنابراین عناصر ماتریس را به شکل زیر خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} <\vec{p}\,\vec{q}\,|\,\psi> \;&=\; <\vec{p}\,\vec{q}\,|\,G_0\;t\;P\,|\,\psi> \\ &=\; \int d^3p''\;d^3q''\int d^3p'\;d^3q'\;\;<\vec{p}\,\vec{q}\,|\,G_0\;t\,|\,\vec{p}\,'\;\vec{q}\,'> \\ &\times\; <\vec{p}\,'\;\vec{q}\,'\,|\,P\,|\,\vec{p}\,''\;\vec{q}\,''><\vec{p}\,''\;\vec{q}\,''\,|\,\psi> \end{aligned} \tag{۱۲}$$

که در آن داریم :

$$< \vec{p}\,\vec{q}\,|\,G_0\ t\,|\,\vec{p}'\ \vec{q}' > = \frac{1}{E - \frac{p^2}{m} - \frac{3}{4m}q^2} < \vec{p}\,\vec{q}\,|\,t\,|\,\vec{p}'\ \vec{q}' >$$

$$\langle \vec{p}\,\vec{q}\,|\,V\,|\,\vec{p}'\ \vec{q}'\rangle = \delta(\vec{q}-\vec{q}')\ \langle \vec{p}\,\vec{q}\,|\,V\,|\,\vec{p}'\ \vec{q}'\rangle$$

و

$$\begin{aligned}\langle \vec{p}\,\vec{q}\,|\,t(E)\,|\,\vec{p}\,'\ \vec{q}\,'\rangle &= \langle \vec{p}\,\vec{q}\,|\,V\,|\,\vec{p}\,'\ \vec{q}\,'\rangle + < \vec{p}\,\vec{q}\,|\,VG_0 t(E)\,|\,\vec{p}\,'\ \vec{q}\,'\rangle \\ &= \delta(\vec{q}-\vec{q}\,')\ \langle \vec{p}\,|\,V\,|\,\vec{p}\,'\rangle \\ &+ \int d^3p\,''\ d^3\vec{q}\,''\langle \vec{p}\,\vec{q}\,|\,V\,|\,\vec{p}\,''\ \vec{q}\,''\rangle \frac{1}{E + i\epsilon - \frac{p\,''^2}{m} - \frac{3}{4m}\,q''^2} \\ &\quad \langle \vec{p}\,''\vec{q}\,''\,|\,t(E)\,|\,\vec{p}\,'\vec{q}\,'\rangle \\ &= \delta(\vec{q}-\vec{q}\,')\ \langle(\vec{p}\,|\,V\,|\,\vec{p}\,'\rangle \\ &+ \int d^3p''\ \langle \vec{p}\,|\,V\,|\,\vec{p}\,''\rangle \frac{1}{E + i\epsilon - \frac{p''^2}{m} - \frac{3}{4m}\,q''^2}\ \langle \vec{p}\,''\vec{q}\,'\,|\,t(E)\,|\,\vec{p}\,'\vec{q}\,'\rangle\end{aligned}$$

که دارای جوابی بصورت:

$$< \vec{p}\,\vec{q}\,|\,t(E)\,|\,\vec{p}'\ \vec{q}' > = \delta(\vec{q}-\vec{q}')\ \ < \vec{p}\,|\,\hat{t}(E - \frac{3}{4m}q^2)\,|\,\vec{p}' >$$

می باشد. باز اگر به معادله فدیو برگردیم:

$$\begin{aligned}\langle \vec{q}\,\vec{p}\,|\,\psi\rangle &= \int d^3p' \int d^3p''\ d^3q''\ \frac{1}{E - \frac{p^2}{m} - \frac{3}{4m}q^2} \\ &\quad \langle \vec{p}\,|\,\hat{t}(E - \frac{3}{4m}q^2)\,|\,\vec{p}\,'\rangle\langle \vec{p}\,'\vec{q}\,|\,P\,|\,\vec{p}\,''\ \vec{q}\,''\rangle\langle \vec{p}\,''\vec{q}\,''\,|\,\psi\rangle\end{aligned} \qquad (۱۳)$$

که در آن:

$$\begin{aligned}\langle \vec{p}\,'\vec{q}\,|\,P\,|\,\vec{p}\,''\vec{q}\,''\rangle &= \delta\left(\vec{p}\,' - \frac{1}{2}\,\vec{q} - \vec{q}\,''\right)\ \delta\left(\vec{q} + \vec{p}\,'' + \frac{1}{2}\,\vec{q}\,''\right) \\ &+ \delta\left(\vec{p}\,' + \frac{1}{2}\,\vec{q} + \vec{q}\,''\right)\ \delta\left(\vec{q} - \vec{p}\,'' + \frac{1}{2}\,\vec{q}\,''\right)\end{aligned}$$

پس بصورت صریح معادله فدیو به شکل زیر محاسبه می گردد:

$$\begin{aligned}\langle \vec{p}\vec{q}\,|\,\psi\rangle &= \frac{1}{E - \frac{p^2}{m} - \frac{3}{4m}\,q^2} \int d^3\vec{q}\,'' \\ &\times \left\{\langle \vec{p}\,|\,\hat{t}\,\left(E - \frac{3}{4m}\,q^2\right)\,|\,-\frac{1}{2}\,\vec{q} - \vec{q}\,''\rangle\ \langle \vec{q} + \frac{1}{2}\,\vec{q}\,''; \vec{q}\,''\,|\,\psi\rangle\right. \\ &+ \left.\langle \vec{p}\,|\,\hat{t}\,\left(E - \frac{3}{4m}\,q^2\right)\,|\,\frac{1}{2}\,\vec{q} + \vec{q}\,''\rangle\ \langle -\vec{q}\,' - \frac{1}{2}\,\vec{q}\,''; \vec{q}\,''\,|\,\psi\rangle\right\}\end{aligned} \qquad (۱۴)$$

با توجه به محاسبه عناصر ماتریسی T و گسسته سازی آن و قرار دادن آن در معادله (۱۴) به منظور محاسبه دامنه پراکندگی سیستم سه نوکلئونی و حل آن به صورت تکرار، می توان تمام مشاهده پذیرهای مربوط به سیستمهای شامل سه نوکلئون را محاسبه نموده و ارتباط آنها با شبکه انتخاب شده بمنظور محاسبه را تعیین

کرد. بنابراین با توجه به این معادله می توان ترازهای انرژی سیستم سه جسمی را در حجم محدود تعریف کرده و بستگی آن به حجم شبکه انتخابی را بررسی نمود.

بحث ونتیجه گیری

در این مقاله ما رابطه ای را برای محاسبه دامنه پراکندگی در سیستمهای سه نوکلئونی بر روی شبکه بدست آوردیم. در محاسبات مربوط به شبکه واقعی ترازهی انرژی تابعی از حجم بکار رفته و معمولا" در حد چند صد MeV می باشند. بستگی حجمی متناسب با عکس توان حجم بوده و واز روی شیفت فاز قابل محاسبه هستند. برای حجم های بزرگ تصحیحات به صورت نمایی کاهش یافته و محدودیتی را بر میزان کوچکی شبکه ایجاد می کنند. باید حال با توجه به اینکه اندرکنشهای الکترومغناطیسی اهمیت در فرآیندهای دارند، اینگونه از اندرکنشها را و عناصر ماتریسی اندرکنشهای مرتبط با حالتهای بین نوکلئونها و نیز انرکنشهای ضعیف را به محاسبات افزود. اطلاعات و دانش مربوط به چنین اندرکنشهایی به محاسبات فرآیندهای ساخت هسته های سنگینتر از سبکتر و چگونگی سنتز نوکلئونی و همچنین مشاهدات نوترینو در آینده کمک خواهد کرد.

مراجع:

[1] Silas R. Beane, Martin J. Savage, *Phys.Lett.* **B535**, 177 (2002).
[2] Silas R. Beane, Martin J. Savage, *Nucl.Phys.* **B636**, 291 (2002).
[3] Silas R. Beane, Martin J. Savage, *Phys.Rev.* **D68**, 114502 (2003).
[4] S.R. Beane, P.F. Bedaque, A. Parreno, M.J. Savage, *Nucl.Phys.* **A747**, 55(2005).
[5] S.R. Beane, P.F.Bedaque, A. Parreno, M.J. Savage , *Phys.Lett.* **B585**, 106 (2004).
[6] S.R. Beane, P.F. Bedaque, K. Orginos, M.J. Savage, *Phys.Rev.Lett.* **97**, 012001 (2006).