محاسبه تحلیلی تراز انرژی اتمهای میونی برای $l \neq 0$

مهدوی، محمد[۱۰]؛ علیمنش محمود

بخش فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه مازندران، بابلسر، کد پستی ۴۱۶-۴۷۴۱۵

چکیده:

در این مقاله معادله شرودینگر برای اتمهای میونی به ازای اندازه حرکت زاویه ای غیر صفر، $l \neq 0$ ، با در نظر گرفتن پتانسیل کولنی بصورت حالت حدی پتانسیل هلتن به عنوان پتابسیل حاکم بر سیستم به طور تحلیلی حل شده است. با اعمال مقادیر مختلف برای پارامتر همپوشی، اثر آن بر ترازهای انرژی سیستم نشان داده شده است. مشاهده می شود که در حالت حدی $\delta \to 0$ ویژه مقادیر محاسبه شده برای سیستم، همان مقادیر انرژی ترازهای مختلف سیستم می باشد که حل تحلیلی معادله شرودینگر بدون اعمال روش مورد نظر بسیار مشکل می بود.

کلمه کلیدی: معادله شرودینگر، اندازه حرکت زاویه ای، پتانسیل هلتن، پارامتر همپوشی.

مقدمه:

لازمه پدیده همجوشی هسته‌ای غلبه بر دافعه کولنی هسته‌های واکنش کننده می‌باشد. به همین منظور یکی از روشهای غلبه بر دافعه کولنی استفاده از فرمیونی به نام میون می‌باشد. با تزریق میون به محیط ایزوتوپهای هیدروژن، میون جانشین الکترونهای اتم هیدروژن شده باعث تولید اتمهای میونی می‌شود. با توجه به اینکه جرم میون حدود ۲۰۷ برابر جرم الکترون است, شعاع اتمهای میون حدود ۲۰۷ برابر کوچکتر از اتمهای الکترون می‌باشد. پتانسیل حاکم بر سیستم اتمهای میونی, پتانسیل کولنی بلند برد می‌باشد. این پتانسیل را می‌توان بصورت حد پتانسیل هلتن بیان نمود. [۱]

$$V^H(r) = -Ze^2 \frac{e^{-\delta r}}{1-e^{-\delta r}} \qquad (1)$$

Z و δ به ترتیب بیانگر عدد اتمی و پارامتر همپوشی می‌باشند. این پتانسیل شکل خاصی از پتانسیل اکارت می‌باشد[۲]، که به صورت گسترده در شاخه‌های مختلف فیزیک مورد استفاده قرار می‌گیرد.

معادلهٔ شرودینگر برای پتانسیل هلتن برای اوربیتال s , $(l=0)$, بطور تحلیلی قابل حل می‌باشد[3,4], ولی معادله شرودینگر برای $l \neq 0$ غالباً به روش عددی که با مشکلاتی همراه است قابل حل می باشد[5-7]. در این طرح هدف، ارائه روش حل تحلیلی معادله شرودینگر برای پتانسیل فوق هلتن به ازای $l \neq 0$ می‌باشد[8].

$$V^H_{(l+1)}(r) = -Ze^2\delta\left[1 - l(l+1)\frac{\hbar^2\delta}{2mZe^2}\right]\frac{e^{-\delta r}}{1-e^{-\delta r}} + \frac{\hbar^2\delta^2}{2m}l(l+1)\frac{e^{-2\delta r}}{(1-e^{-\delta r})^2}, \qquad l = 0,1,2,\ldots \qquad (2)$$

به ازای $l=0$ تبدیل به پتانسیل هلتن معمولی می‌شود. رابطه(۲) را به صورت زیر نیز می‌توان مرتب کرد,

[10] E-mail: m.mahdavi@umz.ac.ir

$$V_{eff}^{(H)}(\gamma)=V_{(l+1)}(r)=-ze^2\delta\frac{e^{-\delta r}}{1-e^{-\delta r}}+\frac{l(l+1)\hbar^2\delta^2}{2m}\frac{e^{-\delta r}}{(1-e^{-\delta r})^2} \quad (3)$$

معادله(۳) برای حالت $\delta\to 0$ تبدیل به پتانسیل کولنی موثر زیر خواهد شد.

$$V_{eff}^{(H)}(r,\delta\approx 0)\to V_{eff}^{(c)}(r)=-\frac{Ze^2}{r}+\frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} \quad (4)$$

برای r های کوچک پتانسیل هلتن رفتاری شبیه پتانسیل کولنی دارد, در حالیکه برای r های بزرگ سریع کاهش می‌یابد. در چارچوب تقارن PT مکانیک کوانتومی, معادله (۲) به همراه ویژه مقادیر و ویژه تابع, شبیه معادله (NU) Nikiforov- Uvarov عمل می‌کند.

تئوری و نتیجه گیری:

روش NU، روشی براي حل معادله شرودينگر غيرنسبيتي براي پتانسيل خاص مي‌باشد. معادلـه شـرودينگر بـا تقـارن PT بـراي پتانسيل هلتن به یک معادلهٔ ديفرانسيل فوق هندسي تبديل مي‌شود, که در آت معادلهٔ ديفرانسيل به صورت زير داريم:

$$\psi''(s)+\frac{\bar{\tau}(s)}{\sigma(s)}\psi'(s)+\frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)}\psi(s)=0 \quad (5)$$

$\sigma(s)$ و $\tilde{\sigma}(s)$ چندجمله‌اي درجه دوم و $\tilde{\tau}$ چندجمله‌اي درجه اول مي‌باشند. با نظر گرفتن تابع مـوج بـه صـورت دو جملـه مجزاي زير

$$\psi(s)=\varphi(s)y(s) \quad (6)$$

معادله (۵)را بصورت زیر خواهیم داشت:

$$\sigma(s)y''(s)+\tau(s)y'+\lambda y(s)=0 \quad (7)$$

که

$$y_n(s)=\frac{B_n}{\rho(s)}\frac{d^n}{ds^n}[\sigma^n(s)\rho(s)] \quad (8)$$

و

$$\frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)}=\frac{\pi(s)}{\sigma(s)}$$

B_n, ضرایب نرمالیزه و $\rho(s)$ به عنوان تابع وزن در رابطه زیر صدق می‌کند,

$$(\sigma(s)\rho(s))'=\tau(s)\rho)(s) \quad (9)$$

تابع $\pi(s)$ و پارامتر λ بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$\pi(s)=\frac{\sigma'(s)-\tilde{\tau}(s)}{2}\pm\sqrt{(\frac{\sigma'(s)-\bar{\tau}(s)}{2}-\tilde{\sigma}(s)+k\sigma(s)} \quad (10)$$

$$\lambda = k + \pi'(s) \qquad (11)$$

که $\pi(s)$ یک چندجمله‌ای با پارامتر s می‌باشد.

به منظور حل معادلهٔ شرودینگر برای سوپر پتانسیل هلتن, معادله (۲) را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$V(r) = -V_1 \frac{e^{-\delta r}}{1-e^{-\delta r}} + V_2 (\frac{e^{-\delta r}}{1-e^{-\delta r}})^2 \qquad (12)$$

که در آن

$$V_1 = ze^2\delta\left[1 - l(l+1)\frac{\hbar^2\delta}{2mZe^2}\right] \quad , \quad V_2 = \frac{\hbar^2\delta^2}{2m} l(l+1) \qquad (13)$$

که در آن

$$\psi_{nlm}(r) = \frac{1}{r} R_{ne}^{(r)} Y_{lm}(\theta,\varphi) \qquad (14)$$

قسمت شعاعی معادله شرودینگر برای پتانسیل $V(r)$ رابصورت زیر خواهی‌م داشت,

$$\frac{d^2R(r)}{dr} + \frac{2M}{\hbar^2}\left[E + V_1\frac{e^{-\delta r}}{1-e^{-\delta r}} - V_2\frac{e^{-2\delta r}}{(1-e^{-\delta r})^2}\right]R(r) = 0 \qquad (15)$$

با اعمال تغییر متغیر $x = \coth(\frac{\delta r}{2})$ خواهیم داشت.

$$\frac{d^2R}{dx^2} + \frac{2x}{x^2-1}\frac{dR}{dx} + \frac{1}{(x^2-1)^2}\left[-4\varepsilon + 2\beta(x-1) - \gamma(x-1)^2\right]R(x) = 0 \qquad (16)$$

بطوریکه,

$$\varepsilon = \frac{2\mu E}{\hbar^2\delta^2} > 0 \ \ (E<0), \qquad \beta = \frac{2\mu V_1}{\hbar^2\delta^2} > 0 \quad , \quad \gamma = \frac{2\mu V_2}{\hbar^2\delta^2} > 0$$

با مقایسه معادله (١٦) با معادله (۵), چندجمله‌ایهای مربوط به صورت زیر بدست خواهد آمد.

$$\bar{\tau}(x) = 2x \ , \quad \sigma(x) = x^2 - 1 \quad , \quad \tilde{\sigma}(x) = -\gamma x^2 + 2(\beta+\gamma)x - (4\varepsilon + 2\beta + \gamma)$$

با جایگزین نمودن چندجمله‌ای فوق در معادله (۱۰) خواهیم داشت.

$$\pi(x) = \pm\sqrt{(\gamma+k)x^2 - 2(\beta+y)x + 4\varepsilon + 2\beta + \gamma - k} \qquad (17)$$

به منظور تعیین حد بالای عبارت فوق به ازای مقادیر صفر برای عبارت زیر رادیکال خواهیم داشت.

$$k = 2\varepsilon + \beta \pm \sqrt{(\beta + 2\in)^2 - \beta^2 + 4\varepsilon\gamma} \qquad (18)$$

بنابراین با قرار دادن معادله (۱۸)در رابطه (۱۷) خواهیم داشت.

$$\pi(x) = \sqrt{\gamma + \beta + 2\varepsilon + \sqrt{4\varepsilon(\varepsilon+\beta+\gamma)}}\,x - \sqrt{\gamma + \beta + 2\varepsilon + \sqrt{4\varepsilon(\varepsilon+\beta+\gamma)}} \qquad (19)$$

همچنین با توجه به معادلات $\lambda = k + \pi'(x)$ و $\tau(x) = \tilde{\tau}(x) + 3\pi(x)$ خواهیم داشت.

$$\lambda = 2\in + \beta - \sqrt{3\varepsilon(\varepsilon+\beta+\gamma)} + \sqrt{\gamma + 2\pi + \beta - \sqrt{4\varepsilon(\varepsilon+\beta+\gamma)}} \qquad (20)$$

و

$$\lambda_n = -2(1+\sqrt{\gamma+2\varepsilon+\beta-\sqrt{4\varepsilon(\varepsilon+\beta+\gamma)}})\, n - n(n-1) \qquad (21)$$

با توجه به اینکه باید $\lambda_n = \lambda$ باشد, از تساوی این دو تابع مقدار E بصورت زیر بدست خواهد آمد.

$$E_n = \left[-\frac{2n+1}{2} + \frac{n(n+1)+\beta}{(1+2n+\sqrt{1+4\gamma}} \right]^2 \qquad (22)$$

با جایگزین کردن مقادیرE، β و γ در رابطه فوق، محاسبه دقیق ویژه مقادیر انرژی هلتن بصورت زیر بدست خواهد آمد.

$$E_n = -\frac{\hbar^2\delta^2}{2\mu}\left[-\frac{2n+1}{2} + \frac{n(n+1)+\dfrac{2\mu V_1}{\hbar^2\delta^2}}{1+2n+\sqrt{1+\dfrac{8\mu V_2}{\hbar^2\delta^2}}} \right]^2 \qquad 0 \le n < \infty \qquad (23)$$

در واحد اتمی $(\hbar = \mu = c = e = 1)$ و برای ایزوتروپهای اتم هیدروژن $Z=1$ مقادیر انرژی بصورت زیر بدست می‌آید.

$$E^{(H)}_{n,l+1} = -\frac{1}{2}\left[-\frac{n+l+1}{2}\delta + \frac{1}{n+l+1} \right]^2 \qquad (24)$$

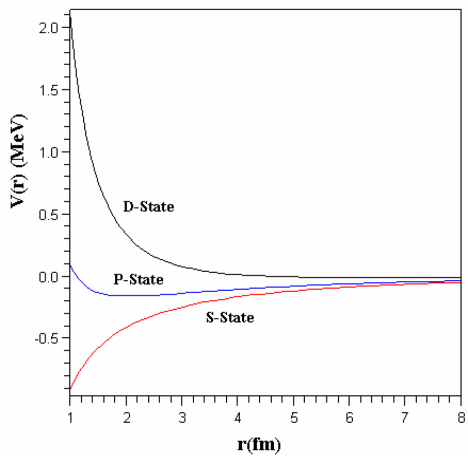
یا

$$E^{(H)}_{\bar{n},l} = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\bar{n}+l} - \frac{\bar{n}+l}{2}\delta \right]^2 , \qquad \bar{n} = n+1 , \quad l = 0,1,2,... \qquad (25)$$

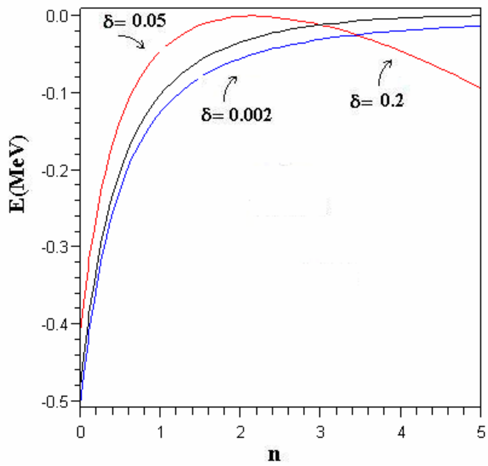
انرژی بدست آمده, مقادیر دقیق انرژی حاصل از حل معادله شروینگر برایر پتانسیل هلتن می‌باشد.
در شکل(۱) پتانسیل هلتن برای حالتهای S، Pو D بر حسب فاصله r نشان داده شده است. مشاهده می شود که برای r های بزرگ ، تغیرات $V(r)$ مشابه همدیگر می باشد. در شکل ۱و ۲ ویژه مقادیر انرژی بر حسب عداد کوانتومی n برای پارامتر همپوشی δ مختلف رسم شده است. مشاهده می شود که با کاهش مقادیر δ ویژه مقادیر محاسبه شده به ویژه مقادیر معادله شرودینگر برای پتانسیل کولنی میل می کند[9]. بعلاوه اگر پارامتر $V_۲$ در معادله (۲۳) برابر سفر در نظر گرفته شود، جواب معادله، ویژه مقادیر حاصل از پتانسیل استاندارد هلتن را خواهد داد.

مراجع:

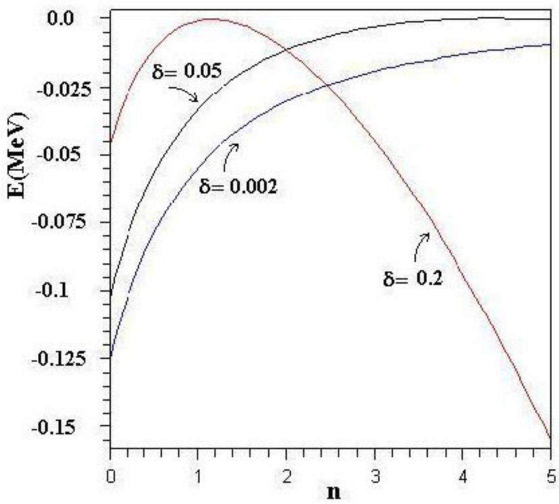
[1] L. Hulthen, Ark. Mat. Astron. Fys. 28 A(1942)5.
[2] C. Ekart, Phys. Rev. 35(1930)1303.
[3] F. Cooper, et al., Phys. Rep. 251(1995)267.
[4] L. E. Gendeustion, JETP Lett. 38(1983)356.
[5] Y. P. Vashin, Phys. Rev. A, 41(1990)4682.
[6] C. S. Lai, W. C. Lim, Phys. Lett. A, 78(1980)335.
[7] E. D. Filho, R. M. Ricotta, Mod. Phys. Lett. A (1995)1613.
[8] B. Gonul, et al., Phys. Lett. A, 275(2000)238.
[9] M. Aktas, R. Sever and J. Molec. Struc. 71(2004)219.



شکل ۱: تغییرات هلتن پتاسیل برحسب r برای حالتهای S، P و D



شکل ۲: تغییرات ویژه مقادیر انژی برحسب عدد کوانتومی n برای حالت S با پارامتر همپوشی δ نشان داده شده در شکل



شکل۳ : تغییرات ویژه مقادیر انژی برحسب عدد کوانتومی n برای حالت P با پارامتر همپوشی δ نشان داده شده در شکل