# حل عددی معادله ترابرد نوترون به روش بی مش

مجتبی، خان بابازاده : احمد، ذوالفقاری: عبدالحمید،مینوچهر: مصطفی، یوسفی
دانشگاه شهید بهشتی، دانشکده مهندسی هسته‌ای، گروه راکتور

## چکیده:

*حل عددی معادله ترابرد یک بعدی چند گروهی نوترون با استفاده از فرمول‌بندی زوج و فرد و با بهره‌گیری از اصل کمترین مربعات، حاصل می‌شود. در این مقاله از روش بی‌مش برای گسسته‌سازی بر روی مکان استفاده شده است که نیاز به ایجاد مش از طریق ایجاد زیردامنه‌هایی که تحت عنوان دامنه پشتیبانی معرفی می‌شود، مرتفع می‌کند و ضمن حذف هزینه محاسباتی ناشی از تولید مش،با ایجاد امکان به اشتراک‌گذاری گره‌های غیر مرزی دو یا چند دامنه پشتیبانی مجاور و درنتیجه افزایش جفت‌شدگی معادلات تقریبی دامنه‌های پشتیبانی مجاور،دقت حل مسئله را افزایش می دهد.*

**کلید واژه:**حل عددی معادله ترابرد،فرمول بندی زوج و فرد، بی‌مش، دامنه پشتیبانی

## مقدمه

الگوریتم‌های متداول حل عددی معادله ی ترابرد بر پایه مش یا شبکه استوارند که برای برای گسسته سازی روی مکان از مش تولید شده برای هندسه ارائه شده بهره می‌برند.از جمله این روش‌ها می توان به روش اختلاف محدود و المان محدود اشاره نمود. روش اختلاف محدود، روشی ساده و نسبتا کارا در زمینه گسسته سازی بر روی مکان است. نیاز به دقت بالا در بعد های بالاتر سبب تولید روش المان محدود شد. افزایش دقت حل عددی در روش‌های المان محدود مستلزم افزایش مرتبه المان یا افزایش تعداد گره‌ها می‌باشد که مستلزم توسعه الگوریتم‌های و روش‌های تولید مش مناسب می‌باشد که خود هزینه مضاعفی را در تحلیل یک مسئله تحمیل می‌کند. یکی از کارامدترین این روش‌ها، الگوریتم‌های تطبیقی می‌باشد که کارایی خود را در حوزه المان محدود به اثبات رسانده‌اند. با این وجود اعمال روش های تطبیقی مستلزم جابجا کردن یا افزودن گره‌های مش تولید شده می‌باشد، حال آنکه هرگونه تغییر یا بازتولید مش علاوه بر در پی داشتن مشکلات خاص خود، معمولا فرایندی زمان‌بر و پرهزینه‌می‌باشد. از این رو هم‌زمان با توسعه روش میتنی بر مش تلاش‌هایی در جهت دستیابی به روش‌های دیگری جهت برطرف کردن وابستگی به مش صورت گرفت که منجر به توسعه روش‌های بی‌مش گردید. در روش‌های بدون مش برخی و یا تمام جنبه های مش‌بندی محاسبات، مستقیماً حذف می‌شوند و حل مسئله بر پایه استفاده از نقاط پراکنده روی دامنه و مرزها برای بیان (نه گسسته‌سازی) دامنه و مرزهای مسئله می‌باشد[۱و۲].این مجموعه نقاط یک مش را شکل نمی‌دهند، به این معنی که یک ارتباط از پیش تعیین شده‌ای بین نقاط برای درون یابی یا تقریب توابع وجود ندارد. روش‌های بی‌مش هم اکنون در مکانیک سیالات، مکانیک جامدات و غیره کارایی خود را به اثبات رسانده است. زمان ورود روش‌های بی‌مش در حوزه تحلیل فیزیک راکتور به روشنی معلوم نیست. لکنبر اساس مطالعات نگارندگان این مقاله اولین تلاش در این زمینه به حل عددی معادله پخش نوترون برمی‌گردد که توسط رک رک و همکاران [۲و۳] انجام شده است. همچنین پژوهش حاضر اولین تلاش در جهت پیاده‌سازی روش‌های بی‌مش در حل عددی معادله ترابرد نوترون چند-گروهی و یک بعدی می‌باشد.

## تئوری و محاسبات

## روش درون‌یابینقطه‌ای چند جمله‌ای[1]

فرض می‌شود که تابع $\varphi(x)$ تابع میدان در دامنه مسأله $\mathbf{\Omega}$ باشد. دامنه مورد نظر به وسیله گروهی از گره‌های پراکنده شده در داخل و روی مرز دامنه حل بیان می‌شود. در روش درون‌یابی نقطه‌ای، تابع $\varphi(x)$ در نقطه مورد نظر $x_Q$ با استفاده از مقادیر تابع در گره‌های داخل دامنه پشتیبانی درون‌یابی می‌کند. بیان ریاضی روش درون‌یابی نقطه‌ای چندجمله‌ای با فرض زیر شروع می‌شود[۲]:

$$\varphi^h(\mathbf{x},\mathbf{x}_Q)=\sum_{i=1}^{n}p_i(\mathbf{x})a_i(\mathbf{x}_Q)=\mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x}_Q) \qquad (۱)$$

به طوری که تابع پایه تک جمله‌ای در مختصات فضایی $\mathbf{x}^T=[x,y,z]$ ، $n$ تعداد گره‌های موجود در دامنه پشتیبانی نقطه $\mathbf{x}_Q$، و $a_i(\mathbf{x}_Q)$ ضریب تک‌جمله‌ای $p_i(\mathbf{x})$ در نقطه مورد نظر $x_Q$ می‌باشد. بردار $\mathbf{a}$ و بردار توابع پایه $\mathbf{p}^T(\mathbf{x})$به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{a}^T(\mathbf{x}_Q)=\{a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n\} \qquad (۲)$$

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x})=\{1,x,x^2,x^3,x^4,\ldots,x^n\} \qquad (۳)$$

ضریب $a_i$ در رابطه (۱)را می توان با ارضا نمودن این رابطه در گره‌های موجود در داخل دامنه پشتیبانی نقطه $\mathbf{x}_Q$ تعیین کرد. که در نتیجه خواهیم داشت:

$$\mathbf{\Phi}_s=\mathbf{P}_Q\mathbf{a} \qquad (٤)$$

که $\varphi_i$مقدار گروهی[2] تابع در نقطه $\mathbf{x}=\mathbf{x}_i$ بوده و $\Phi_s$ برداری است که مقادیر متغیرهای میدانی را در تمامی گره‌ها در دامنه پشتیبانی جمع می‌کند.

با استفاده از رابطه (۴) و با فرض این که معکوس ماتریس $\mathbf{P}_Q$ وجود دارد می توان شکل صریح‌تری برای تابع درون‌یابی به صورت زیر به دست آورد:

$$\varphi^h(\mathbf{x})=\mathsf{n}^T(\mathbf{x})\mathbf{\Phi}_s \qquad (٥)$$

که $\mathsf{n}^T$ ماتریس متشکل از توابع شکلی روش درون‌یابی نقطه‌ای( $\eta_i(\mathbf{x})$ ) می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathsf{n}^T(\mathbf{x})=\mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{P}_Q^{-1}=[\eta_1(\mathbf{x}),\eta_2(\mathbf{x}),\eta_3(\mathbf{x}),\ldots,\eta_n(\mathbf{x})] \qquad (٦)$$

## اصل $K^+$

اصل $K^+$ برای یک دامنه پشتیبانی به صورت زیر به دست می‌آید[۴و۵و۷]:

$$\boldsymbol{K^+[\xi_s]=2\xi_s^T\mathbb{S}_s-\xi_s^T\mathbb{M}_s\xi_s} \qquad (۷)$$

که در آن داریم:

$$\boldsymbol{\xi_s^T}\equiv \qquad (۸)$$

$$\left[\underbrace{\xi^s_{00,1}\ \cdots\ \xi^s_{00,P}}_{\xi^s_{00}}\ \underbrace{\xi^s_{2-2,1}\ \cdots\ \xi^s_{2-2,P}}_{\xi^s_{2-2}}\ \underbrace{\xi^s_{2-1,1}\ \cdots\ \xi^s_{2-1,P}}_{\xi^s_{2-1}}\ \cdots\ \underbrace{\xi^s_{lm,1}\ \cdots\ \xi^s_{lm,P}}_{\xi^s_{lm}}\ \cdots\right]$$

$$\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\,\boldsymbol{\varphi^s_{lm}(\mathbf{r})\approx\mathbb{m}_s^T(\mathbf{r})\xi^s_{lm}} \quad ; \quad \mathbf{r}\in\boldsymbol{V_s} \qquad (۹)$$

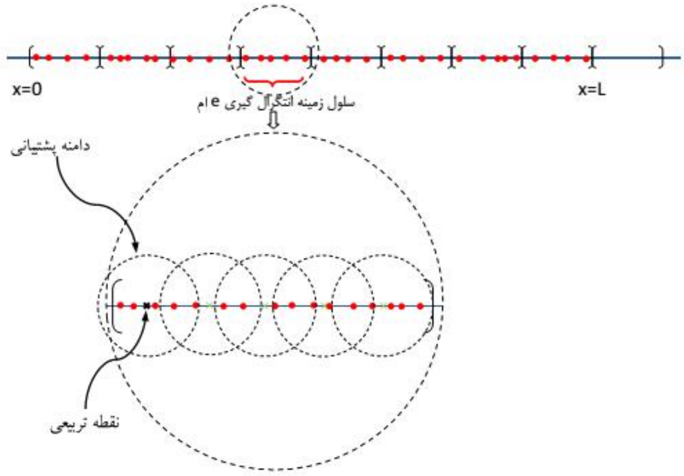
که درایههایبردار$\xi^s_{lm}$ضرایبنامعلومیهستندکهدر صورت پیدایش،مقادیرتابعآزمون رادرگره‌هایدامنه پشتیبانی مشخصمیکنندمطابق این اصل چنانچه میزان خطای حاصل از بکارگیری تابع آزمون $\psi^+$ به جای $\psi_0^+$ در تمام دامنه حل مسئله به حداقل ممکن برسد آنگاه اصول یاد شده حداکثر مقادیر خود

[1]Polynomial Point Interpolation Method
[2] Nodal Value

را که عددی معلوم است، داشته و به عبارتی $\psi^+$ به $\psi_0^+$ میل می کند. این بیشینه‌سازی معادل حل دستگاه معادلات خطی $\mathbb{M}_s\xi_s = \mathbb{S}_s$ است که پس از سرهم‌بندی تمام ماتریس‌های محلی به صورت $\mathbb{M}\xi = \mathbb{S}$ درآمده و با الگوریتم‌های عددی متداول حل می‌شود.

## پیاده سازی روش

در شروع کار، دامنه مسأله با نقاطی که به طور مناسبی پراکنده شده‌اند، نشان داده می‌شود. برای انتگرال‌گیری از گروهی از سلول‌های زمینه[۳] استفاده می‌شود که، مستقل از گره‌های دامنه‌ای می‌باشند.دامنه پشتیبانی برای نقطه دلخواه $x_Q$ (که همان یک نقطه تربیعی[۴] گاوسی در یک سلول انتگرال‌گیری می‌باشد) با استفاده از یک شعاع زیردامنه محلی برای مسائل یک‌بعدی تعریف می‌گردد. این دامنه پشتیبانی با نقطه $x_Q$ که در مرکزش قرار دارد، تشکیل می‌شود. تعداد گره‌ها[۵] $n$ را می‌توان با شمارش تمام نقاطی[۶] که داخل دامنه پشتیبانی قرار گرفته‌اند، بدست آورد. در مسائل یک و دوبعدی اندازه دامنه پشتیبانی بایستی طوری انتخاب شود که $n = 7 \sim 30$ باشد.




*شکل۱. نمایش سلول‌های زمینه، نقاط تربیعی و دامنه‌های پشتیبانی[۵]*

برای تعریف دامنه پشتی‌بانی برای نقطه $x_Q$، اندازه دامنه پشتی‌بانی $d_s$ با رابطه زیر مشخص می‌شود:

$$d_s = \alpha_s d_c \qquad (۱۰)$$

که $\alpha_s$ اندازه بی‌بعد[۷] دامنه پشتیبانی و $d_c$ طول مشخصه می‌باشد که به فاصله گرهی در نزدیکی نقطه $x_Q$ مربوط است. اگر گره‌ها به طور یکنواخت توزیع شده باشند، $d_c$ به صورت فاصله بین دو گره مجاور هم تعریف می‌شود. در مواردی که گره‌ها به طور غیر یکنواخت پخش شده‌اند، $d_c$ را می‌توان به صورت فاصله میانگین گره‌ها در دامنه پشتیبانی $\mathbf{x}_Q$ تعریف کرد.در مسائل یک بعدی ساده‌ترین روش تعریف میانگین فاصله گرهی با رابطه زیر است:

$$d_c = \frac{D_s}{(n_{D_s} - 1)} \qquad (۱۱)$$

(۱۲)

## راستی‌آزمایی نتایج و مقایسه

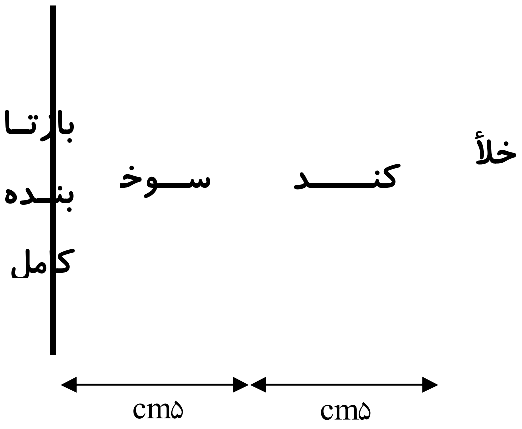
مسائل متفاوت و زیادی با استفاده از این روش حل شده و با مسائل محک مقایسه شده است. در زیر به یک نمونه از این مسائل اشاره شده است.

### تیغه همگن با چشمه ثابت دو گروهی و پراکندگی شدیداً ناهمسانگرد[۵]

---

[3] Background Cells
[4] Quadrature Point
[5] Nodes
[6] Points
[7] Dimensionless Size

هدف در این آزمون سنجش توانایی روش بی‌مش در حل مسائل با بیش از دو گروه انرژی و مقایسه آن با روش مشابه با گسسته‌سازی المان محدود است. یک رآکتور دو ناحیه ای را نشان می دهد که مرز چپ آن بازتابنده کامل بوده و مرز راست آن خلا است. مشخصات نوترونی این دو ناحیه در جدول۱ آمده و نتایج محاسبات بحرانیت با احتساب ۴۰۰ المان خطی با نتایج کد DRAGONکه بر پایه معادله انتگرالی ترابرد توسعه یافته،در جدول ۲ مقایسه شده است.




شکل۲.مشخصاتهندسیرآکتورچهارگروهییکبعدی

جدول۱. سطوحمقاطعمربوطبهآزمون[۴]

| گروه | ماده | | | ، | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| گروه اول | سوخت | 0.154156839 | 0.066206839 | 0.083004 | 0.009572 |
| | کند کننده | 0.1032 | 0.0091 | 0.0941 | 0.0000 |
| گروه دوم | سوخت | 0.306739057 | 0.245499057 | 0.0584 | 0.0171448 |
| | کند کننده | 0.3524 | 0.2171 | 0.1353 | 0.0000 |
| گروه سوم | سوخت | 0.52759312 | 0.43253312 | 0.06453 | 0.01768 |
| | کند کننده | 0.5544 | 0.4146 | 0.1387 | 0.0000 |
| گروه چهارم | سوخت | 0.9408222279 | 0.819822279 | 0.0000 | 0.158140 |
| | کند کننده | 2.2981 | 2.279 | 0.0000 | 0.0000 |
| طیف شکافت | | 0.575 | 0.425 | 0.0 | 0.0 |

جدول۲. نتایجمحاسباتبحرانیتروشبیمشبرایرآکتورناهمگنچهارگروهیومقایسهآنباروشالمانمحدود[۴و۵]

| Keff for Four-Group Reflected Core by Mesh-Free&Finite Element (ΔK=1E-6) | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Method** | P1 | P3 | P7 | P15 | P31 | DRAGON (Pij) |
| | | | **MESH FREE** | | | |
| **Keff** | 0.659507 | 0.683730 | 0.685521 | 0.685425 | 0.685391 | 0.685325 |
| **Δ (%)** | -3.76726 | -0.23274 | 0.0286 | 0.014592 | 0.00963 | 0.000000 |

| Finite Element | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Keff | 0.659508 | 0.683737 | 0.685528 | 0.685432 | 0.685398 | 0.685325 |
| Δ (%) | -3.76698 | -0.23157 | 0.029767 | 0.015759 | 0.010798 | 0.000000 |

## نتیجه‌گیری

نتایج بدست آمده کارایی روش بی‌مش را در مقایسه با روش المان محدود روشن می‌سازد و به نظر می‌رسد این روش می‌تواند جایگزین مناسبی برای روش المان محدود به ویژه در مسئله‌های با بعدهای بالاتر و هندسه‌های پیچیده‌ترباشد. همچنین در صورت اعمال روش‌های تطبیقی، عملکرد این روش نسبت به روش المان محدود بهتر بوده و انعطاف‌پذیری مطلوب را دارد.

## مراجع

[1] G.R. Liu,T.Y. Gu, "An Introduction to Meshfree Methods and their Programming", Springer, 2005.

[2] G.R. Liu, "Mesh Free Methods Moving beyond the Finite Element Method", CRC Press LLC, 2003.

[3] B.Rokrok, H. Minuchehr and A. Zolfaghari, "Application of Radial Point Interpolation Method to Neutron Diffusion Field", Trends in Applied Sciences Research 7 (1):18-31,2012

[4] B.Rokrok, H. Minuchehr and A. Zolfaghari, "Element-free Galerkin modeling of neutron diffusion equation in X-Y geometry",Ann. Nuc. Energy, 43 (2012) 39-48.

[۵]یوسفی ,مصطفی *.رهیافت ورشی در ترابرد نوترون*. دانشکده مهندسی هسته ای، دانشگاه شهید بهشتی،ایران، ۱۳۸۹.

[۶]خان بابازاده، مجتبی. حلعددیمعادلهزوجپارهترابردنوترونبااستفادهازبسطهماهنگ‌هایکرویوروشبی مش. دانشکده مهندسی هسته ای، دانشگاه شهید بهشتی،ایران، ۱۳۹۱.

[7] Ackroyd, R. T., Finite Element Methods for Particle Transport, Application to Reactor and Radiation Physics. Research Studies Press (John Wiley & Sons Inc.), 1997.