

۱۶ و ۱۷ اسفندماه ۱۳۹۴ دانشگاه یزد

محاسبه سطح مقطع همجوشی دوتریوم-تریوم و دوتریوم-هلیوم ۳ با استفاده از پتانسیل مختلط با مغز سخت

کوه‌رخی، طه^۱؛ ایزدپناه، عبدالمجید^۱

^۱ گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه گلستان، گرگان، کدپستی ۱۵۷۵۹-۴۹۱۳۸

چکیده:

در این مقاله سطح مقطع همجوشی واکنش‌های دوتریوم-تریوم و دوتریوم-هلیوم ۳ با استفاده از یک پتانسیل مختلط با مغز سخت، به منظور وارد کردن اثرات کوانتومی طرد پاؤلی و تراکم‌ناپذیری ماده هسته‌ای و عدم همپوشانی کامل توابع موج به عمق شعاع مغز سخت مورد مطالعه قرار گرفته است. همچنین در این محاسبات، تاثیر اسپین ذرات برهمکنش‌گر و پایستگی همزمان اسپین-پارایته لحاظ شده است. با وجود ساده بودن مدل و در نظر گرفتن ساده‌ترین فرض‌ها، ملاحظه می‌شود که توافق خوبی بین نتایج بدست آمده از این محاسبات و داده‌های تجربی حاصل شده است.

کلمه کلیدی: پتانسیل مختلط، سطح مقطع همجوشی، پایستگی اسپین-پارایته، مغز سخت

۱- مقدمه

یکی از مدل‌های کارآمدی که اغلب به منظور توصیف پراکندگی مورد استفاده قرار گرفته است، مدل اپتیکی نام دارد که در آن پتانسیل هسته‌ای به صورت یک پتانسیل مختلط در نظر گرفته می‌شود. قسمت حقیقی پتانسیل، بیانگر پراکندگی ذرات و قسمت موهومی آن بیانگر جذب ذرات توسط پتانسیل است. تحقیقات انجام شده، کارآمدی این مدل را در توصیف واکنش همجوشی هسته‌های سبک نشان داده است [۱]. در این مقاله، در ساده‌ترین حالت، مدل اپتیکی با در نظر گرفتن یک چاه مربعی مختلط برای پتانسیل هسته‌ای، جهت بررسی تونل‌زنی کوانتومی واکنش‌های دوتریوم-تریوم و دوتریوم-هلیوم ۳ بکار گرفته شده است. همچنین به منظور لحاظ کردن اثرات کوانتومی طرد پاؤلی و ماده هسته‌ای، برای پتانسیل هسته‌ای یک مغز سخت در نظر گرفته شده است [۲]. این مغز سخت، مبدأ ($r=0$) را در راستای شعاعی حذف کرده و در نتیجه تابع موج بدست آمده از معادله شرودینگر، هر دو جواب منظم و غیرمنظم را شامل می‌شود. با در نظر گرفتن این ملاحظات، توافق خوبی بین نتایج حاصل از این محاسبات و داده‌های تجربی حاصل شده است. نتایج بدست آمده با نتایج حاصل از روابط ۵ و ۹ پارامتری و همچنین داده‌های تجربی مقایسه شده است [۴، ۳ و ۷].

۲- مدل اپتیکی و سطح مقطع

چاه پتانسیل هسته‌ای را در ساده‌ترین حالت، به صورت یک چاه پتانسیل مختلط مربعی با شعاع R_N و یک مغز سخت با شعاع R_{rc} در نظر می‌گیریم. مغز سخت برای پتانسیل به منظور لحاظ کردن اثرات کوانتومی طرد پاؤلی و تراکم‌ناپذیری ماده هسته‌ای در نظر گرفته شده است:

$$V(r) = \begin{cases} \infty & r \leq R_{rc} \\ -V_r - iV_i & R_{rc} < r \leq R_N \\ Z_p Z_i e^2 / r & r > R_N \end{cases} \quad (1)$$

که در آن $Z_p e$ و $Z_i e$ به ترتیب بار ذره پرتابه و هدف، و V_r و V_i به ترتیب قسمت‌های حقیقی و موهومی پتانسیل هسته‌ای هستند. در فاصله $R_{rc} < r \leq R_N$ ، جواب بخش شعاعی معادله شرودینگر مستقل از زمان برای پتانسیل هسته‌ای برابر است با:

$$R_{\ell,N}(\rho_N) = A j_\ell(\rho_N) + B y_\ell(\rho_N) \quad (2)$$

که در آن $j_\ell(\rho_N)$ و $y_\ell(\rho_N)$ به ترتیب توابع منظم و نامنظم بسل کروی، $\rho_N = k_N r$ و $k_N = \sqrt{(2\mu/\hbar^2)(E + V_r + iV_i)} = k_{Nr} + ik_{Ni}$ با استفاده از شرایط مرزی بدست می‌آیند. طبق رابطه (۱) برای پتانسیل یک مغز سخت در نظر گرفتیم به طوری که نفوذ تابع موج بر قلب مغز سخت ($r \leq R_{rc}$) ناممکن است $R_{\ell,N}(\rho_{Nc}) = 0$. در این صورت داریم:

$$R_{\ell,N}(\rho_N) = A [j_\ell(\rho_N) - j_\ell(\rho_{Nc}) y_\ell(\rho_N) / y_\ell(\rho_{Nc})] \quad (3)$$

که در آن $\rho_{Nc} = k_N R_{rc}$ است. اکنون تابع موج کولنی را بررسی می‌کنیم. با استفاده از تغییر متغیرهای $R_{\ell,Coul}(r) = u_{\ell,Coul}(r)/r$ و $\rho = kr$ ، از حل قسمت شعاعی معادله شرودینگر برای این پتانسیل در حالت مجانبی r های بزرگ بدست می‌آید [۵]:

$$u_{\ell,Coul}(kr) = e^{i\delta_\ell} \cos \delta_\ell (\tan \delta_\ell G_\ell(\eta, \rho) + F_\ell(\eta, \rho)) \quad (4)$$

۵ و ۶ اسفندماه ۱۳۹۴ دانشگاه یزد

که در آن $k = \sqrt{2\mu E/\hbar^2}$ عدد موج ذره آزاد، $\eta = 1/ka_C$ پارامتر کولنی بی‌بعد، $a_C = \hbar^2/\mu Z_p Z_t e^2$ طول واحد کولنی است. $F_\ell(\eta, \rho)$ و $G_\ell(\eta, \rho)$ به ترتیب توابع موج کولنی منظم و نامنظم هستند. شرایط پیوستگی توابع موج کولنی و هسته‌ای و مشتق آن‌ها در فاصله مجانبی $r=a$ ($r > R_N$)، به طور همزمان با برابر قراردادن معکوس مشتق‌های لگاریتمی هسته‌ای بدست می‌آید:

$$\left. \frac{1}{a} \frac{u_{\ell,N}(k_N r)}{u'_{\ell,N}(k_N r)} \right|_{r=a} = \left. \frac{1}{a} \frac{u_{\ell,Coul}(kr)}{u'_{\ell,Coul}(kr)} \right|_{r=a} \quad (5)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho_a} \frac{F_\ell(\rho_a, \eta) + \tan \delta_\ell^N G_\ell(\rho_a, \eta)}{F'_\ell(\rho_a, \eta) + \tan \delta_\ell^N G'_\ell(\rho_a, \eta)} = N_{lr}(\rho_{Na}) + i N_{li}(\rho_{Na})$$

که در آن $\rho_a = ka$ و $\rho_{Na} = k_N a$ است. $N_{li}(\rho_{Na})$ و $N_{lr}(\rho_{Na})$ به ترتیب قسمت‌های حقیقی و موهومی معکوس مشتق لگاریتمی تابع موج هسته‌ای در $r=a$ هستند. از این تساوی، اختلاف فاز کمی مختلط بدست می‌آید $\delta_\ell^N = \delta_{lr}^N + i\delta_{li}^N$. در نتیجه تانژانت اختلاف فاز نیز کمی مختلط است $\tan \delta_\ell^N = \text{Td}_{lr}^N + i\text{Td}_{li}^N$. با کمی محاسبه مؤلفه‌های حقیقی و موهومی اختلاف فاز هسته‌ای به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\left\{ \begin{aligned} \text{Td}_{lr}^N &= \frac{N_{lr}\rho_a (G_\ell F'_\ell + F_\ell G'_\ell) - G'_\ell F'_\ell \rho_a^2 (N_{lr}^2 + N_{li}^2) - F_\ell G_\ell}{G_\ell'^2 \rho_a^2 (N_{lr}^2 + N_{li}^2) + G_\ell (G_\ell - 2G'_\ell N_{lr}\rho_a)} \\ \text{Td}_{li}^N &= \frac{N_{li}\rho_a}{G_\ell'^2 \rho_a^2 (N_{lr}^2 + N_{li}^2) + G_\ell (G_\ell - 2G'_\ell N_{lr}\rho_a)} \end{aligned} \right. \quad (6)$$

با استفاده از این روابط احتمال عبور از سد پتانسیل برابر می‌شود با:

$$T_\ell(E) = \left(1 - |e^{2i\delta_\ell^N}|^2\right) = \frac{4\text{Td}_{li}^N}{(\text{Td}_{lr}^N)^2 + (1 + \text{Td}_{li}^N)^2} \quad (7)$$

در نتیجه سطح مقطع کل به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\sigma_f = \frac{\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} g(I, s_p, s_t) T_\ell(E) \quad (8)$$

که در آن، $g(I, s_p, s_t) = (2I+1)/(2s_p+1)(2s_t+1)$ عامل آماری مربوط به اسپین پرتابه، هدف و تراز تشدید در هسته مرکب است. فرض کنید ذره p با اسپین s_p با ذره t با اسپین s_t و با تکانه زاویه‌ای نسبی \mathbf{L} با هم وارد

۱۶ و ۱۷ شهریور ۱۳۹۴ دانشگاه یزد

واکنش شده و هسته مرکب C^* را با تکانه زاویه‌ای کل تشدید \mathbf{I} تشکیل داده‌اند. در یک برهمکنش هسته‌ای تکانه زاویه‌ای کل $\mathbf{I} = \mathbf{s}_p + \mathbf{s}_t + \mathbf{L}$ و همچنین پاریده پایسته است.

۳- واکنش همجوشی $T(D,n)_2^4He$

واکنش همجوشی دوتریوم-تریوم به هسته مرکب ${}^5_2He^*$ منجر شده و سپس این هسته مرکب به 4_2He و n واپاشی می‌کند. سطوح انرژی را به همراه ترازهای برانگیخته در هسته مرکب ${}^5_2He^*$ بررسی می‌کنیم [۶]. اسپین هسته‌های دوتریوم و تریوم به ترتیب $S_D = 1$ ، $S_T = 1/2$ و پاریده‌های ذاتی آنها زوج است. حاصل جمع اسپین‌های آنها برابر $\mathbf{S} = \mathbf{s}_D + \mathbf{s}_T = 1 + 1/2 = \{1/2, 3/2\}$ است. اسپین-پاریده حالت پایه و دومین حالت برانگیخته هسته 5_2He به ترتیب، $I^\pi = 3/2^-$ و $I^\pi = 3/2^+$ است و ضریب آماری برای این دو حالت $g_{G,S}^{DT} = g_2^{DT} = 2/3$ می‌باشد. بنابر پایستگی تکانه زاویه‌ای کل $\mathbf{I} = \mathbf{S} + \mathbf{L}$ ، تکانه‌های زاویه‌ای ممکن عبارتند از $\ell = 0, 1, 2, 3$. بنابر پایستگی پاریده، برای حالت پایه اعداد $\ell = 1, 3$ و برای دومین حالت برانگیخته $\ell = 0, 2$ قابل قبول است. اسپین-پاریده اولین حالت برانگیخته هسته 5_2He ، $I^\pi = 1/2^-$ و ضریب آماری برای این حالت $g_1^{DT} = 1/3$ است. پایستگی تکانه زاویه‌ای کل، تکانه‌های زاویه‌ای $\ell = 0, 1, 2$ را مجاز می‌دارد و بنابر پایستگی پاریده، برای اولین حالت برانگیخته اعداد $\ell = 1$ را نتیجه می‌دهد.

اکنون سطح مقطع واکنش همجوشی $T(D,n)_2^4He$ را در بازه انرژی $0.12 \langle E_{CM} \text{ (keV)} \rangle (170$ بررسی می‌کنیم. اسپین-پاریده دومین حالت برانگیخته هسته 5_2He به اندازه 137 keV بالاتر از حالت پایه سطح انرژی $D+T$ قرار می‌گیرد که این مقدار بایستی توسط انرژی جنبشی کل ذرات در دستگاه مختصات مرکز جرم جبران شود. در نتیجه این حالت تنها برای انرژی‌های $E_{CM} \geq 137 \text{ keV}$ قابل دسترس خواهد بود. برای انرژی‌های $E_{CM} < 137 \text{ keV}$ تنها حالت پایه و اولین حالت برانگیخته می‌توانند در سطح مقطع نقش ایفا کنند. با قرار دادن رابطه (۷) در (۸) و ملاحظات فوق برای پایستگی اسپین-پاریده بدست می‌آید:

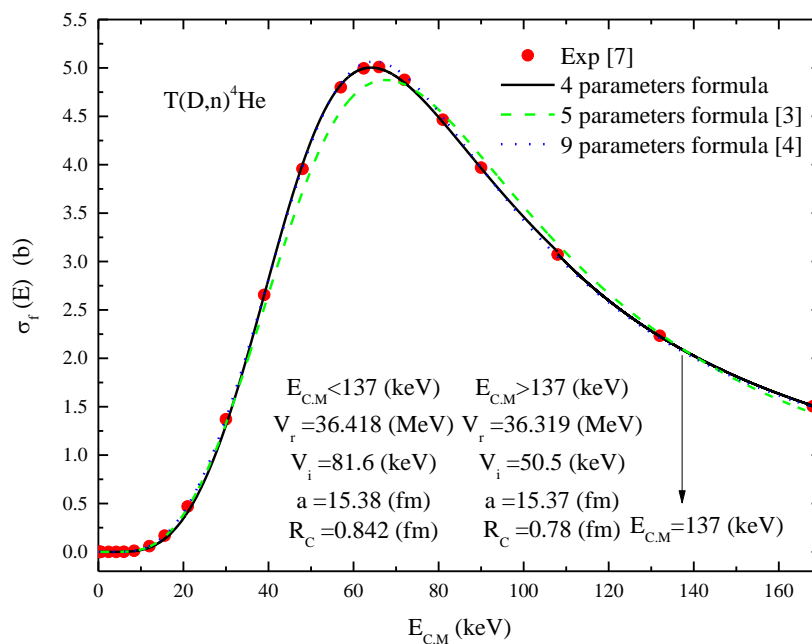
۱۶ و ۱۷ اسفندماه ۱۳۹۴ دانشگاه یزد

$$\sigma_f = \begin{cases} \frac{\pi}{k^2} \{ g_{G.S}^{DT} [T_1(E) + T_3(E)] + g_1^{DT} T_1(E) \} & 0.12 \langle E_{C.M} \text{ (keV)} \rangle < 137 \\ \frac{\pi}{k^2} \left\{ \begin{aligned} & g_{G.S}^{DT} [T_1(E) + T_3(E)] \\ & + g_1^{DT} T_1(E) + g_2^{DT} [T_0(E) + T_2(E)] \end{aligned} \right\} & 137 \langle E_{C.M} \text{ (keV)} \rangle < 170 \end{cases} \quad (9)$$

۴- واکنش همجوشی ${}^3_2\text{He}(D, p){}^4_2\text{He}$

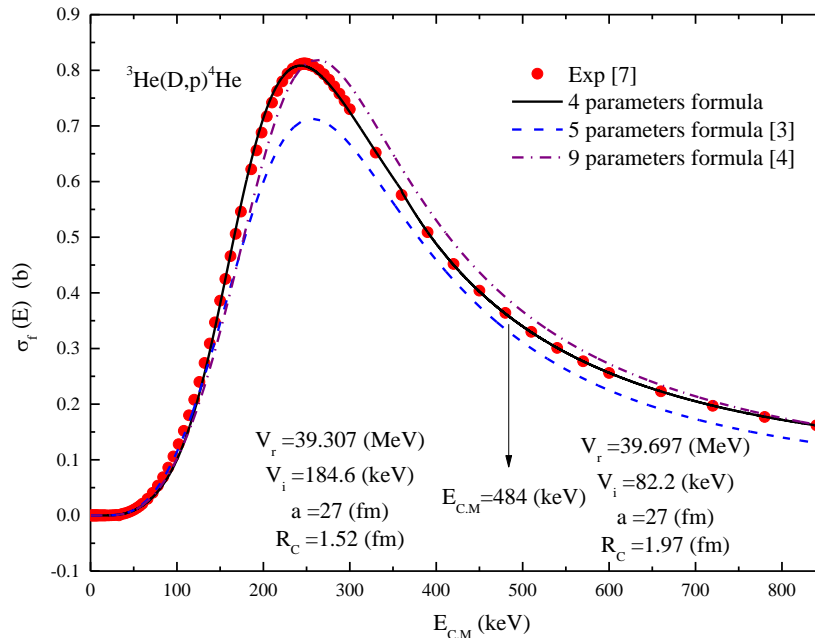
واکنش همجوشی دوتریوم-هلیوم ۳ به ${}^3_2\text{Li}^*$ منجر شده و سپس این هسته مرکب به ${}^4_2\text{He}$ و p واپاشی می‌کند. اسپین و پاریته ذرات برهمکنش‌گر و هسته مرکب و در نتیجه گزینش مقادیر تکانه زاویه‌ای، مشابه واکنش $T(D, n){}^4_2\text{He}$ است. تنها تفاوت در سطوح انرژی است که با توجه به جرم هسته‌ها می‌توان آنها را بدست آورد [۶]. اکنون سطح مقطع واکنش همجوشی ${}^3_2\text{He}(D, p){}^4_2\text{He}$ را در بازه انرژی $0.54 \langle E_{C.M} \text{ (keV)} \rangle (850$ بررسی می‌کنیم. ملاحظه می‌شود که حالت

پایه و اولین حالت برانگیخته



۵ و ۶ اسفندماه ۱۳۹۴ و دانشگاه یزد

شکل (۱): نمودار سطح مقطع همجوشی واکنش دوتریوم-تریوم بر حسب انرژی در دستگاه مختصات مرکز جرم. نتایج حاصل از محاسبات نظری به صورت خط پیوسته و داده‌های تجربی به صورت نقاط توپر نمایش داده شده‌اند.



شکل (۲): نمودار سطح مقطع همجوشی واکنش دوتریوم-هلیوم ۳ بر حسب انرژی در دستگاه مختصات مرکز جرم. نتایج حاصل از محاسبات نظری به صورت خط پیوسته و داده‌های تجربی به صورت نقاط توپر نمایش داده شده‌اند.

به ازای هر انرژی قابل دسترس می‌باشند. بنابراین سطح مقطع واکنش بر طبق گزینش اسپین-پاریته عبارت است از:

$$\sigma_f = \begin{cases} \frac{\pi}{k^2} \left\{ g_{G.S}^{D^3He} [T_1(E) + T_3(E)] + g_1^{D^3He} T_1(E) \right\} & 0.54 \langle E_{CM} \text{ (keV)} \rangle 484 \\ \frac{\pi}{k^2} \left\{ g_{G.S}^{D^3He} [T_1(E) + T_3(E)] + g_1^{D^3He} T_1(E) + g_2^{D^3He} [T_0(E) + T_2(E)] \right\} & 484 \langle E_{CM} \text{ (keV)} \rangle 850 \end{cases} \quad (10)$$

۵- نتیجه گیری

روابط بدست آمده برای سطح مقطع همجوشی دوتریوم-تریوم (رابطه (۹)) و دوتریوم-هلیوم ۳ (رابطه (۱۰)) برای یافتن ۴ پارامتر

که کمترین مربعات خطا $S = \sum_{i=1}^{\text{Data Number}} (\sigma_{\text{exp}} - \sigma_{\text{theo}})^2$ را نتیجه دهد بر داده‌های تجربی برازش شده

۱۳۹۴ و ۱۶ اسفندماه ۱۳۹۵ دانشگاه یزد

است [۷]. σ_{exp} سطح مقطع تجربی و σ_{theo} سطح مقطع حاصل از محاسبات نظری است. مقادیر بدست آمده برای این ۴ پارامتر و همچنین مقدار خطا روی هر شکل نشان داده شده است. چنانچه از شکل‌های (۱) و (۲) دیده می‌شود رابطه ۴ پارامتری خطای کمتر و در نتیجه توافق بهتری نسبت به روابط ۵-پارامتری [۳] و ۹-پارامتری [۴] با داده‌های تجربی از خود نشان می‌دهد. نتایج مطلوب بدست آمده از انتخاب پتانسیل مختلط با مغز سخت (رابطه (۱)) همراه با در نظر گرفتن پایستگی تکانه زاویه‌ای کل و پاریته نتیجه می‌شود.

مراجع

- [1] X. Z. Li, Q.M. Wei, B. Liu, A new simple formula for fusion cross-sections of light nuclei. Nucl. Fusion 48, 125003 (2008).
- [2] O. N. Ghodsi and V. Zanganeh, *The effect of the nuclear state equation on the surface diffuseness parameter of the Woods–Saxon potential in the heavy ion fusion reactions*, Nuclear Physics A, 846, 40–50, 2010.
- [3] J. D. Huba, 2013 *NRL Plasma Formulary* (Washington DC: Naval Research Laboratory) p 44 revised.
- [4] H. S. Bosch, G. M. Hale, *Nucl. Fusion*. **32** (1992) 611-31.
- [5] M. Abramowitz, I. A. Stegun (eds), *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables* (National Bureau of Standards, 1972).
- [6] D. R. Tilley, C.M. Cheves, J. L. Godwin, G. M. Hale, H. M. Hofmann, J. H. Kelley, C. G. Sheu and H. R. Weller, Nucl. Phys. A, **708** (2002) 3.
- [7] C. L. Dunford, Data retrieved from the Cross Section Information Storage and Retrieval System (CSISRS) data base (Feb 27, 1996); available on Internet (<http://www.nndc.bnl.gov>).