

۱۶ و ۱۷ اسفندماه ۱۳۹۴ دانشگاه یزد

مطالعه رفتار گذار معادلات سنتیک نقطه ای شش گروهی در حضور راکتیویته دمایی پسخور به کمک روش نمای لیاپانوف

مسعود صیدی^{۱*}، رسول خدابخش^۱، سهراب بهنیا^۲

۱. گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه ایلام، صندوق پستی: 516-69315، ایلام - جمهوری اسلامی ایران

۱. گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه ارومیه، صندوق پستی: 165-57153، ارومیه - جمهوری اسلامی ایران

۲. گروه فیزیک، دانشگاه صنعتی ارومیه، صندوق پستی: 414-16116، ارومیه - جمهوری اسلامی ایران

چکیده

چگالی نوترون یکی از مهمترین پارامترهای دینامیکی در راکتور می باشد که مستقیماً به کنترل و پایداری راکتور وابسته است. روش نمای لیاپانوف یک ابزار قدرتمند برای بررسی محدوده پایداری و رفتار گذار توان راکتور می باشد که در مقایسه با روشهای پایداری خطی دیگر می تواند برای اختلالات بزرگ به کار برده شود. در این مطالعه محدوده پایداری به کمک روش نمای لیاپانوف برای معادلات سنتیک نقطه ای با شش گروه نوترون تأخیری در حضور راکتیویته دمایی پسخور بررسی شده است. نتایج حاصل از روش کیفی با روشهای مرسوم مقایسه شده، و در توافق خوبی با آنها می باشد.

واژه‌های کلیدی: روش نمای لیاپانوف، نوترون تأخیری.

مقدمه:

چگالی نوترون و غلظت والدهای نوترون تأخیری مهمترین پارامترهای مرتبط با رفتار گذار توان و ایمنی راکتور می باشند که مستقیماً متأثر از راکتیویته هستند [1,2]. روشهای مختلفی برای تحلیل پایداری راکتورهای هسته ای وجود دارد [3-5] که این روشها به دو گروه خطی و غیر خطی تقسیم بندی میشوند، که معیار رز-هوریتز^۱ [6]، معیار نایکویست^۲ [5] و دیاگرام بود^۳ [7] بعضی از روشهای خطی تحلیل پایداری می باشند. این روشها برای تحلیل سیستمهای با اختلالات

1. Routh-Hurwitz

2. Nyquist

3. Bode Diagram

۱۶ و ۱۷ شهریور ماه ۱۳۹۴ دانشگاه یزد

کوچک مفید هستند [5]. از بین روشهای غیرخطی تحلیل پایداری، روش دوم لیاپانوف و روش نمای لیاپانوف [8-10]^۴ از کارآمدترینها می باشند. اما در روش دوم لیاپانوف پیدا کردن تابع لیاپانوف مشکل می باشد. اگرچه روشهایی مانند روش آیزرمن^۵، سزگو^۶، روزن^۷، روش متغیرهای گرادینتی^۸ و غیره [5, 8, 10] برای ساخت تابع لیاپانوف مفید می باشند ولیکن هیچ کدام از این روشها سیستماتیک و جامع نیست. روش نمای لیاپانوف این مشکلات را ندارد و بر پایه ویژه مقادیر و ویژه بردارهای ماتریس ژاکوبین می باشد [11-13]. تخمین نمای لیاپانوف مهمترین مسئله در تئوری کنترل می باشد که بطور گسترده ای برای سیستم های خطی متغیر با زمان گسسته و پیوسته [14-15] استفاده شده است. نمای لیاپانوف شرط لازم و کافی برای پایداری مجانبی سیستمهای خطی را می دهد [16]. بنابراین نمای لیاپانوف می تواند برای تحلیل پایداری سیستمهای غیر آشوبناک^۹ بکار برود. در این مقاله به کمک روش نمای لیاپانوف، پایداری معادلات سنتیک نقطه ای نوترون^{۱۰} (NPK) با تغییر مقادیر مختلف پارامترهای دینامیکی راکتور در حضور راکتیویتهٔ پسخور دمایی^{۱۱} با در نظر گرفتن شش گروه نوترون تأخیری بررسی شده است.

روش کار:

معادلات سنتیک نقطه ای نوترون:

معادلات NPK با در نظر گرفتن راکتیویتهٔ پسخور دمایی مجموعه ای از معادلات غیر خطی کوپل شده می باشند که حل تحلیلی دقیقی ندارند [17]. کلی ترین شکل این معادلات به صورت زیر می باشد [18]:

$$\frac{dn(t)}{dt} = \left(\frac{\rho(t) - \beta}{l} \right) n(t) + \sum_{i=1}^m \lambda_i c_i(t) + q(t) \quad (1)$$
$$\frac{dc_i(t)}{dt} = \frac{\beta_i}{l} n(t) - \lambda_i c_i(t)$$

4 . Lyapunov exponent

5 . Aizerman

6 . Szego

7 . Rosen

8 . Variable Gradient Methods

9 . Nonchaotic

10 . Neutron Point Kinetics

11 . Temperature Feedback Reactivity

۱۶ و ۱۷ شهریور ۱۳۹۴، دانشگاه یزد

که در اینجا $\rho(t)$ راکتیویته خالص می باشد که برابر مجموع راکتیویته خارجی $\rho_{ext}(t)$ و پسخور دمایی $\rho_f(t)$ است [19]. $n(t)$ چگالی نوترونی، $c_i(t)$ غلظت i امین گروه والد نوترون تأخیری، β_i کسر نسبی i امین گروه نوترون تأخیری، β کل کسر مؤثر نوترون های تأخیری، l زمان نسل نوترونهای آنی، λ_i ثابت واپاشی گروه نوترون تأخیری و $q(t)$ منبع نوترون خارجی می باشد. بنابراین $\rho(t)$ عبارت است از:

$$\rho(t) = \rho_0 - \alpha [T(t) - T_0] \quad (2)$$

که α ضریب دمایی راکتیویته، ρ_0 راکتیویته اولیه، $T(t)$ دمای قلب راکتور و T_0 دمای اولیه قلب راکتور می باشد. بعد از اینکه راکتیویته اولیه به داخل قلب راکتور تزریق شد توان راکتور سریعاً پاسخ می دهد و در این وضعیت مدل بی دررو برای محاسبات تغییرات دمایی راکتور کاربرد دارد [5]:

$$\frac{dT(t)}{dt} = k_c n(t) \quad (3)$$

که در آن k_c وارون ظرفیت گرمایی قلب راکتور می باشد.

روش نمای لیاپانوف:

نمای لیاپانوف مقیاسی از آهنگ فاصله گرفتن مسیرها در فضای فاز می باشد [20, 21]. نمای لیاپانوف منفی به معنای نزدیک شدن مسیرها به نقطه ثابت می باشد. وقتی که نما صفر باشد مسیرها در سرجایشان ثابتند اما کافی است از بین نماها، یک نمای مثبت باشد تا سیستم را ناپایدار و آشوبناک کند [19]. بنابراین کافی است برای تحلیل پایداری یک سیستم، نماهای لیاپانوف را محاسبه کنیم. به طور کلی نمای لیاپانوف به صورت زیر تعریف می شود [19]:

دو مسیر همسایه را در فضای فاز در زمانهای 0 و t را در نظر می گیریم که فاصله نقطه ای از این دو مسیر را در i امین امتداد در زمان های ذکر شده به ترتیب $\|\delta x_i(0)\|$ و $\|\delta x_i(t)\|$ خواهد بود. بنابراین نمای لیاپانوف، Λ_i به صورت متوسط آهنگ رشد این فواصل تعریف می شود:

$$\frac{\|\delta x_i(t)\|}{\|\delta x_i(0)\|} = 2^{\Lambda_i t} \quad (t \rightarrow \infty) \quad \text{یا} \quad \Lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log_2 \frac{\|\delta x_i(t)\|}{\|\delta x_i(0)\|} \quad (4)$$

عموماً می توان نماهای لیاپانوف را به کمک یکی از دو رهیافت زیر بدست آورد:

۱۶ و ۱۷ شهریور ۱۳۹۴ دانشگاه یزد

- ۱- بر پایه فاصله گرفتن نقاط همسایه مربوط به دو مسیر از فضای فاز، که به الگوریتم ولف^{۱۲} معروف است [21].
 - ۲- بر پایه تخمین ویژه مقادیر ماتریس ژاکوبین.
- در این مقاله از رهیافت دوم استفاده شده است.

نتایج:

در اینجا ما رفتار دینامیکی سیستم معادلات (۱) تا (۳) برای محاسبه ناهای لیپانوف بررسی می کنیم. مجموعه تمام ناهای لیپانوف یک سیستم متغیر با زمان گسسته یعنی $\{\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n\}$ را طیف ناهای این سیستم می گویند [14]. مطابق با تئوری اوسلدک^{۱۳} وضعیت پایداری یک سیستم می تواند به کمک بزرگترین نمای لیپانوف طیف، $\Lambda = \Lambda_{\max}$ تعیین شود یعنی اگر $\Lambda < 0$ ، آنگاه سیستم به طور مجانبی پایدار است و اگر $\Lambda > 0$ ، آنگاه سیستم ناپایدار است [15]. در اینجا تمام مختصه های فضای فاز عبارتند از: $n(t), c_1(t), c_2(t), c_3(t), c_4(t), c_5(t), c_6(t)$ و $T(t)$. بنابراین هشت نمای لیپانوف خواهیم داشت یعنی: $\{\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_8\}$. هر کدام از ناهای مربوط به تغییرات یکی از مختصه ها می باشد. در این مقاله حل عددی معادلات NPK به منظور بدست آوردن سری زمانی با روش ODE45 انجام شده است. شرط اولیه در تمام این محاسبات عبارت است از [17, 18]:

$$n_0 = 1, \quad c_{0i} = \frac{n_0 \beta_i}{l \lambda_i} \quad (5)$$

داده های استفاده شده در این محاسبات برای یک راکتور حرارتی با سوخت ^{235}U در جدول ۱ داده شده است.

جدول ۱. داده های یک راکتور حرارتی با سوخت ^{235}U [1, 17, 18].

Parameter	Value	Parameter	Value
$\lambda_1 (s^{-1})$	0.0124	β_1	0.00021
$\lambda_2 (s^{-1})$	0.0305	β_2	0.00141
$\lambda_3 (s^{-1})$	0.111	β_3	0.00127
$\lambda_4 (s^{-1})$	0.301	β_4	0.00255

¹² . Wolf Algorithm

¹³ . Theorem of Oseledec

۵ و ۶ اسفندماه ۱۳۹۴ دانشگاه یزد

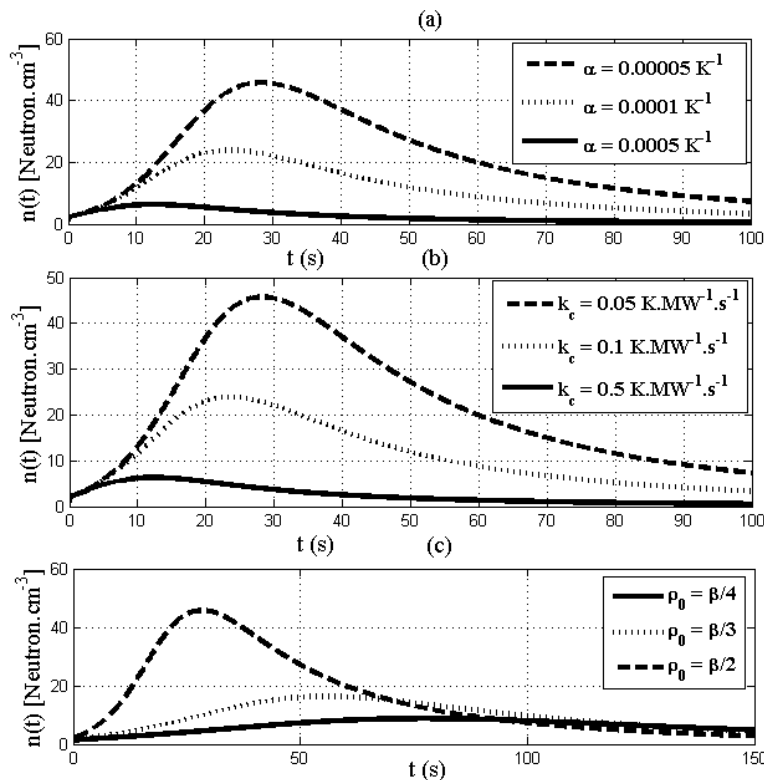
$\lambda_5 (s^{-1})$	1.13	β_5	0.00074
$\lambda_6 (s^{-1})$	3.0	β_6	0.00027
$l(s)$	0.00005	β	0.00645
$\alpha (K^{-1})$	0.00005	$k_c (Mw^{-1}K^{-1}s^{-1})$	0.05

جدول ۲. نماهای لیاپانوف نسبت به تغییرات پارامترهای کنترلی مختلف.

α	Λ_1	Λ_2	Λ_3	Λ_4	Λ_5	Λ_6	Λ_7	Λ_8
0.00001	-0.0007	-0.0116	-0.0246	-0.0947	-0.2415	-1.0683	-2.9400	-257.8245
0.00005	-0.0007	-0.0118	-0.0246	-0.0948	-0.2416	-1.0685	-2.9402	-258.3478
0.00010	-0.0007	-0.0118	-0.0247	-0.0949	-0.2417	-1.0686	-2.9403	-258.9940
0.00100	-0.0007	-0.0119	-0.0252	-0.0958	-0.2441	-1.0710	-2.9427	-270.0838
k_c	Λ_1	Λ_2	Λ_3	Λ_4	Λ_5	Λ_6	Λ_7	Λ_8
0.001	-0.0011	-0.0114	-0.0246	-0.0947	-0.2414	-1.0683	-2.9400	-257.6987
0.010	-0.0009	-0.0116	-0.0246	-0.0947	-0.2415	-1.0683	-2.9400	-257.8243
0.050	-0.0007	-0.0118	-0.0246	-0.0948	-0.2416	-1.0685	-2.9402	-258.3438
0.100	-0.0007	-0.0118	-0.0247	-0.0949	-0.2417	-1.0686	-2.9403	-258.9941
$\rho_0 (\$)$	Λ_1	Λ_2	Λ_3	Λ_4	Λ_5	Λ_6	Λ_7	Λ_8
0.5	-0.0007	-0.0111	-0.0211	-0.0867	-0.2238	-1.0497	-2.9217	-194.2564
1	-0.0007	-0.0118	-0.0246	-0.0948	-0.2416	-1.0685	-2.9402	-258.3748
1.5	-0.0008	-0.0120	-0.0263	-0.0990	-0.2530	-1.0802	-2.9517	-322.6741
2	-0.0008	-0.0121	-0.0272	-0.1015	-0.2609	-1.0882	-2.9594	-387.0629

۱۶ و ۱۷ شهریور ۱۳۹۴ دانشگاه یزد

با توجه به مقادیر جدول ۲ تمام نماهای لیاپانوف مربوط به پارامترهای کنترلی مختلف سیستم در محدوده مشخص شده منفی می باشند. بنابراین سیستم در طولانی مدت ($t \rightarrow \infty$) به سمت پایداری می رود، یعنی مسیر های فضای فاز به نقاط ثابت سیستم که مبین نقاط پایدار می باشند نزدیک می شوند.



شکل ۱. چگالی نوترون به عنوان تابعی از زمان برای مقادیر مختلف ضریب دمایی راکتیویته (a) وارون ظرفیت گرمایی قلب راکتور (b) و راکتیویته اولیه (c)

شکلهای 1a, 1b و 1c چگالی نوترونی را بترتیب به صورت تابعی از زمان به ازای مقادیر مختلف ضریب دمایی راکتیویته، وارون ظرفیت گرمایی قلب راکتور و راکتیویته اولیه را نشان می دهد. در تمامی این اشکال چگالی نوترونی به یک مقدار ماکزیمم می رسد و سپس به دلیل اثرات پسخور دمایی کاهش می یابد و بطور مجانبی به سمت صفر می رود و این کاملاً منطبق بر پیش بینی نمای لیاپانوف می باشد.

۵ و ۶ اسفندماه ۱۳۹۴ دانشگاه یزد

جدول ۳. پیک چگالی نوترونی بعد از s 150 [17].

ρ_0 (\$)	The peak of the neutron density				Time of the peak			
	TSM	GAEM	NAM	ODE45	TSM	GAEM	NAM	ODE45
0.5	45.75429	45.75212	45.75240	45.7524	8.293	28.293	28.293	28.293
1	807.8765	807.8672	807.8666	3	0.953	0.953	0.953	0.954
1.2	8020.848	8020.919	8020.916	807.867	0.317	0.317	0.317	0.317
1.5	43021.00	43024.69	43025.93	6	0.168	0.168	0.168	0.168
2	167739.3	167800.4	167856.6	8020.79	0.098	0.098	0.098	0.099
				5				
				43020.8				
				2				
				167738.				
				9				

با توجه به جدول ۳ پاسخ چگالی نوترونی به راکتیویته اولیه را نشان می دهد. در اینجا پیک چگالی نوترونی با روش عددی *ODE45* بدست آمده است و مقدار آن با روشهای مرسوم *TSM*, *GAEM* و *NAM* [17, 18] مقایسه شده است که نتایج حاصل از *ODE45* با روشهای ذکر شده در جدول توافق خوبی می باشد. بنابراین محاسبات عددی سری زمانی و در پی آن نمای لیاپانوف با روش *ODE45* معتبر و قابل استفاده می باشد.

بحث و نتیجه گیری:

در این پژوهش برای پیدا کردن سری زمانی چگالی نوترونی از روش *ODE45* استفاده شده که روش معتبر و قابل قبولی در محاسبات دینامیک راکتور می باشد و همچنین پایداری معادلات *NPK* شش گروهی در حضور راکتیویته پسخور دمایی به ازای تغییر پارامترهای دینامیکی مختلف به کمک رهیافت دوم روش نمای لیاپانوف بررسی شد. در تمام موارد سیستم رفتار پایداری دارد و سری زمانی نیز در تأیید آن می باشد. روش نمای لیاپانوف قادر است پایداری

۱۶ و ۱۷ اسفندماه ۱۳۹۴ دانشگاه یزد

سیستم را در یک بازه دلخواه از پارامتر کنترل با هر تعداد درجه آزادی بررسی کند. به عنوان یک مدل واقعی تر می توان معادلات ترمو هیدرولیک کوپل شده با معادلات NPK را در بررسی رفتار گذار توان در راکتورهای BWR را با روش نمای لیپانوف بررسی کرد.

مراجع:

1. Nahla, A. A. Analytical solution to solve the point reactor kinetics equations, *Nucl. Eng. Des.* **240**: 1622-1629 (2010).
2. Li, F. Y., Chen, Z., & Liu, Y. Research on stability of a reactor with power reactivity feedback, *Prog. Nucl. Energy* **67**: 15-17 (2013).
3. Lewins, J. D., & Ngcobo, E. N. Property discontinuities in the solution of finite difference approximations to the neutron diffusion equations, *Ann. Nucl. Energy* **23**: 29-34 (1996).
4. Munoz-Cobo, J. L., Garca, C., Escriva, A., & Melara, J. Reactivity calculation in the frequency domain for BWR stability codes, *Ann. Nucl. Energy* **35**: 1185-1198 (2008).
5. Hetrick, D. L. *Dynamics of Nuclear Reactors*. American Nuclear Society, La Grange Park (1993).
6. Della, R., Alhassan, E., Adoo, N. A., Bansah, C. Y., Nyarko, B. J. B., & Akaho, E. H. K. Stability analysis of the Ghana Research Reactor-1 (GHARR-1), *Energy Convers. Manage.* **74**: 578-593 (2013).
7. Seborg, D. E., Edgar, T. F., Mellichamp, D. A. *Process dynamics and control*. 2nd ed. John Wiley and Sons Inc (2004).
8. Ergen, W. K., Lipkin, H. J., & Nohel, J. A. Applications of Lyapunov's second method in reactor dynamics. *J. Math. Phys.* **36**: 36-48 (1957).
9. Chen, W. Z., Kuang, B., & Guo, L. F. New analysis of prompt supercritical process with temperature feedback. *Nucl. Eng. Des.* **236**: 1326-1329 (2006).
10. Slotine, J. J. E., & Li, W. *Applied Nonlinear Control*, Prentice Hall Englewood Cliffs, New Jersey (1991).

11. Khoda-bakhsh, R., Behnia, S., & Jahanbakhsh, O. Stability analysis in nuclear reactor using Lyapunov exponent, *Ann. Nucl. Energy* **35**: 1370-1372 (2008).
12. Suzudo, T. Application of a nonlinear dynamical descriptor to BWR stability analyses, *Prog. Nucl. Energy* **43**: 217-223 (2003).
13. Shayesteh, M., Behnia, S., & Abdi Saray, A. Criticality calculations in a nuclear reactor by using the Lyapunov exponent method, *Ann. Nucl. Energy* **43**: 131-135 (2012).
14. Czornik, A., & Nawrat, A. On new estimates for Lyapunov exponents of discrete time varying linear systems, *Autom.* **46**: 775-778 (2010).
15. Rong, W., Meng, G., Wang, X. D., Xu, W., & Fang, T. Largest lyapunov exponent for second-order linear systems under combined harmonic and random parametric excitations, *J. Sound Vibration* **283**: 1250-1256 (2005).
16. Verdejo, H., Vargas, L., & Kliemann, W. Stability of linear stochastic systems via Lyapunov exponents and applications to power systems, *Appl. Math. Comput.* **218**: 11021-11032 (2012).
17. Nahla, A. A. Taylors series method for solving the nonlinear point kinetics equations, *Nucl. Eng. Des.* **241**: 1592-1595 (2011).
18. Nahla, A. A. An efficient technique for the point reactor kinetics equations with Newtonian temperature feedback effects, *Ann. Nucl. Energy* **38**: 2810-2817 (2011).
19. Sathiyasheela, T. Power series solution method for solving point kinetics equations with lumped model temperature and feedback, *Ann. Nucl. Energy* **36**: 246-250 (2009)
20. Ott, E. *Chaos in dynamical system*, Cambridge university press, Canada (1993).
21. Wolf, A., Swift, J. B., Swinney, H. L., Vastano, J. A. Determining Lyapunov exponents from a time series, *Phys. D* **16**: 285-317 (1985).



بیست و دومین کنفرانس هسته‌ای ایران



۱۳۹۴ و ۱۳۹۵ اسفندماه دانشگاه یزد