

## محاسبه انرژی حالت پایه ایزوتوپ های کربن از طریق حل معادله نسبیتی دیراک با استفاده از پتانسیل وود- ساکسون

روشن بخت، نفیسه\*<sup>(۱)</sup> - شجاعی، محمد رضا<sup>(۱)</sup>

دانشگاه صنعتی شاهرود، دانشکده فیزیک، گروه هسته ای

### چکیده:

در این مقاله، با استفاده از مدل شبه ذره ای منفرد و به صورت نسبیتی به بررسی انرژی حالت پایه برخی از ایزوتوپهای کربن پرداخته شده است. در این مدل، ایزوتوپ کربن مورد بررسی با اضافه کردن یک نوترون و یا یک حفره ناشی از فقدان آن، به نزدیکترین هسته ی زوج - زوج که دارای پوسته کامل و یا زیر پوسته کامل است، به دست می آید و خواص هسته از حرکت نسبیتی همین نوکلئون تزویج نشده منفرد ناشی می شود. جهت حل تحلیلی معادله دیراک با استفاده از پتانسیل وود ساکسون و با در نظر گرفتن تقارن شبه اسپینی  $k \neq 0$ ، از روش نیکیفورو-یوواروا (NU) استفاده شده است و انرژی حالت پایه برای برخی از ایزوتوپهای کربن محاسبه گردیده است.

کلمات کلیدی: مدل شبه ذره ای منفرد، ایزوتوپ های کربن، معادله دیراک، پتانسیل وود- ساکسون

### مقدمه :

بعد از فرضیه هایزبرگ، تئوری های ساختار هسته های اتمی نظیر مدل همگن ویگنر و مدل قطره مایع بوهر شکل گرفت. پس از آن، مدل لایه ای مطرح شد و خواص موجود در هسته ها را به اعداد کوانتومی وابسته کرد و بر همین اساس توانست محدوده ی زیادی از مشاهده پذیرهای هسته ای نظیر اسپین و پاریتته را برای ترازهای هسته ای پیش بینی نماید. در این مدل، ساختار هسته های اتمی به صورت ترازهای انرژی ای توصیف می شود که از اصل طرد پاولی پیروی می کنند. اساس فرضیه این مدل بر این اصل می باشد که هر نوکلئون به طور مستقل در پتانسیل میانگین ناشی از اندرکنش نوکلئونهای دیگر در هسته، حرکت می کند. در دهه سال ۲۰۰۰، میشل و همکارانش، به مطالعه بر روی هسته های نوترون غنی کربن با استفاده از مدل لایه ای و با در نظر گرفتن حالتهای غیر مقید گاموو پرداختند و خواص هسته ها را توسط مدل شرودینگر و به صورت غیر نسبیتی بررسی کردند [۱].

در این مقاله به بررسی اثرات نسبیتی در مطالعه انرژی حالت پایه ایزوتوپهای  $^9\text{C}$ ،  $^{11}\text{C}$ ،  $^{13}\text{C}$  و  $^{15}\text{C}$  پرداخته ایم. کلیه ایزوتوپهای مورد بررسی دارای نیمه عمر بسیار کوتاه هستند به جز ایزوتوپ  $^{13}\text{C}$  که پایدار است [۲]. در مدل لایه ای ذره منفرد ایزوتوپ  $^{11}\text{C}$  به صورت یک هسته با زیر لایه پر  $1P_{3/2}$  به همراه یک حفره

در همین لایه بررسی می شود که ناشی از کمبود یک نوترون است، در حالیکه ایزوتوپ های  $^{13}\text{C}$  و  $^{9}\text{C}$  به ترتیب دارای زیر لایه کاملاً پر  $1S_{1/2}$ ،  $1P_{3/2}$  و  $1P_{1/2}$  به همراه یک نوترون اضافه در زیر لایه بالاتر مورد بررسی قرار می گیرد. نوترون ذره ای با اسپین  $1/2$  است و در بررسی انرژی های بالا می بایست از معادله دیراک و حل آن جهت محاسبه انرژی حالت پایه استفاده کرد. جهت اندرکنش بین نزدیک ترین هسته زوج-زوج با نوکلئون اضافی و یا حفره، از پتانسیلی استفاده می شود که شامل جمله پتانسیل کولنی و پتانسیل هسته ای باشد و پتانسیل وود- ساکسون شکلی از هر دو مورد را در بر گیرد. استفاده از پتانسیل وود- ساکسون به صورت اولیه و تغییر یافته در بررسی ساختار هسته ها بسیار موفقیت آمیز بوده است و از این رو پتانسیل انتخابی ما نیز شکل استاندارد پتانسیل وود- ساکسون است که رابطه آن به صورت زیر است

$$V(r) = -\frac{V_0}{1 + \exp\left(\frac{r - R_0}{a}\right)} \quad (1)$$

در این رابطه،  $R_0$  شعاع میانگین هسته و پارامتر  $a$  ضخامت پوست است. با قرار دادن پتانسیل وود- ساکسون به جای پتانسیل های نرده های و برداری در معادله دیراک به حل آن با استفاده از تقریب پکریس و روش نیکیفورو- یووارو (NU) پرداخته ایم [۳-۵].

### معرفی معادله دیراک با پتانسیل مرکزی:

معادله دیراک در شرح نسبیتی برای یک نوکلئون منفرد با جرم  $M$ ، به صورت زیر نوشته می شود [6]:

$$[\hat{\alpha} \cdot \hat{c}\mathbf{p} + \hat{\beta}(Mc^2 + S(r))]\psi_{n,\kappa} = [E - V(r)]\psi_{n,\kappa}$$

که در آن  $P$  عملگر اندازه حرکت،  $E$  انرژی نسبیتی،  $S(r)$  پتانسیل جاذبه و نرده ای و  $V(r)$  پتانسیل دافعه برداری است. دلیل وجود اصلاح پتانسیل نرده ای به دلیل قرار گرفتن این پتانسیل در مجاورت جرم است و محل قرار گیری عبارت پتانسیل برداری هم در کنار انرژی است. ضرایب  $\alpha$  و  $\beta$  ماتریس های دیراک  $4 \times 4$  نامیده می شوند و به صورت زیر تعریف می گردند:

$$\mathbf{p} = -i\hbar\nabla \quad \alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad (3)$$

در معادلات فوق،  $\sigma_i$  ماتریسهای پاولی و  $I$  ماتریس واحد است. در معادله دیراک، پتانسیلهای  $S(r)$  و  $V(r)$  به ترتیب پتانسیل نرده ای و پتانسیل برداری خوانده می شوند. در یک پتانسیل مرکزی، هامیلتونین با اندازه حرکت زاویه ای کل  $J$  و  $\hat{K} = -\hat{\beta}(\hat{\alpha}\hat{L} + I)$  جا به جا می شود و  $L$  بیانگر اندازه حرکت زاویه ای مداری است. مقادیر ویژه اندازه حرکت زاویه ای کل  $J$  را با  $j$  نشان می دهیم و مقادیر ویژه عملگر  $\hat{K}$  به شکل  $\kappa = \pm(j + 1/2)$  تعریف می گردد. علامت مثبت در رابطه، برای اسپین های غیر همسو و علامت منفی

برای اسپین‌های همسو در نظر گرفته می‌شود. از این رو تابع موج به شکل چهار مولفه‌ای در میدان مرکزی به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\psi_{n_r, \kappa}(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} F_{n_r, \kappa}(r) Y_{jm}^l(\theta, \phi) \\ iG_{n_r, \kappa}(r) Y_{jm}^{\bar{l}}(\theta, \phi) \end{pmatrix} \quad (4)$$

در این رابطه  $F_{n_r, \kappa}(r)$  به عنوان مولفه بالایی و  $G_{n_r, \kappa}(r)$  به عنوان مولفه پایینی در معادله دیراک تعریف می‌شود و  $n_r$  عدد کوانتومی شعاعی است.  $Y_{jm}^l(\theta, \phi)$  و  $Y_{jm}^{\bar{l}}(\theta, \phi)$  نیز توابع هامونیک کروی و  $m$  تصویر اندازه حرکت زاویه‌ای در راستای محور  $Z$  است.  $l$  و  $\bar{l}$  اعداد کوانتومی اندازه حرکت زاویه‌ای مدارای که به اعداد کوانتومی اسپینی و شبه اسپینی اشاره دارند.

با جایگزین کردن معادله (4) در معادله (۲) و استفاده از شکل ماتریسی معادله دیراک، دو معادله دیفرانسیلی مختلف برای توابع موج شعاعی به دست می‌آید:

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{\kappa}{r}\right)F_{n_r, \kappa}(r) = \frac{1}{\hbar c} [Mc^2 + E_{n_r, \kappa} - \Delta(r)]G_{n_r, \kappa} \quad (5الف)$$

$$\left(\frac{d}{dr} - \frac{\kappa}{r}\right)G_{n_r, \kappa}(r) = \frac{1}{\hbar c} [Mc^2 - E_{n_r, \kappa} + \Sigma(r)]F_{n_r, \kappa} \quad (5ب)$$

که در آن:

$$\Delta(r) = V(r) - S(r) \quad (6الف)$$

$$\Sigma(r) = V(r) + S(r) \quad (6ب)$$

از طریق حذف  $F_{n_r, \kappa}(r)$  از رابطه (5الف) و حذف  $G_{n_r, \kappa}(r)$  از رابطه (5ب)، دو معادله دیفرانسیل مرتبه دوم، مشابه با معادله شرودینگر برای مولفه‌های بالایی و پایینی معادله دیراک به دست می‌آید:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\kappa(\kappa-1)}{r^2}\right)G_{n_r, \kappa}(r) + \left[-\frac{1}{\hbar^2 c^2} (Mc^2 + E_{n_r, \kappa} - \Delta(r))\right] \left(Mc^2 - E_{n_r, \kappa} + \Sigma(r)\right) - \frac{1}{\hbar^2 c^2} \frac{(d\Sigma(r)/dr)(d/dr - \kappa/r)}{Mc^2 - E_{n_r, \kappa} + \Sigma(r)} G_{n_r, \kappa}(r) = 0 \quad (7الف)$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\kappa(\kappa+1)}{r^2}\right)F_{n_r, \kappa}(r) + \left[-\frac{1}{\hbar^2 c^2} (Mc^2 + E_{n_r, \kappa} - \Delta(r))\right] \left(Mc^2 - E_{n_r, \kappa} + \Sigma(r)\right) + \frac{1}{\hbar^2 c^2} \frac{(d\Delta(r)/dr)(d/dr + \kappa/r)}{Mc^2 + E_{n_r, \kappa} - \Sigma(r)} F_{n_r, \kappa}(r) = 0 \quad (7ب)$$

در این روابط  $\kappa(\kappa-1) = \tilde{l}(\tilde{l}+1)$  و  $\kappa(\kappa+1) = l(l+1)$  است. در اینجا، فرض بر این اساس است که توابع موج در شرایط مرزی یعنی  $F_{n_r, \kappa}(0) = G_{n_r, \kappa}(0) = 0$  و  $F_{n_r, \kappa}(\infty) = G_{n_r, \kappa}(\infty) = 0$  صدق می کنند.

**حل معادله دیراک با پتانسیل وود- ساکسون برای ایزوتوپ های کربن:**

تحت شرط تقارن شبه اسپینی، عدد ثابت  $[V]\Sigma(r) = V(r) + S(r) = C_{ps}$  معادله (۷) به صورت زیر تقلیل می یابد:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\kappa(\kappa-1)}{r^2}\right)G_{n_r, \kappa}(r) + \left[-\frac{1}{\hbar^2 c^2}(Mc^2 + E_{n_r, \kappa} - \Delta(r))(Mc^2 - E_{n_r, \kappa} + C_{ps})\right]G_{n_r, \kappa}(r) = 0 \quad (8)$$

در این رابطه، برای مقادیر  $\kappa < 0$  مقدار  $\tilde{l} = -\kappa$  و برای مقادیر  $\kappa > 0$  مقدار  $\tilde{l} = \kappa - 1$  در نظر گرفته شده است. با جایگذاری پتانسیل وود- ساکسون به جای  $V(r)$  و  $S(r)$  در معادله (۸) می توان رابطه ذیل را به دست آورد:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\kappa(\kappa-1)}{r^2}\right)G_{n_r, \kappa}(r) + \left[-\frac{1}{\hbar^2 c^2}\left(Mc^2 + E_{n_r, \kappa} - \frac{2V_0}{1 + \exp\left(\frac{r-R_0}{a}\right)}\right)(Mc^2 - E_{n_r, \kappa} + C_{ps})\right]G_{n_r, \kappa}(r) = 0 \quad (9)$$

با بررسی معادله (۹) مشخص می گردد که پتانسیل ترکیبی از یک تابع نمایی و یک تابع معکوس درجه دوم  $\kappa(\kappa-1)/r^2$  است که پتانسیل گریز از مرکز نام دارد، می باشد و حل تحلیلی آن از طریق روش NU به جز در حالت  $\kappa=0, -1$  امکان پذیر نیست. از این رو برای رفع این مشکل، می بایست از تقریب پکریس در عبارت گریز از مرکز جهت حل تحلیلی معادله، استفاده شود. این تقریب بر اساس بسط عبارت گریز از مرکز بر حسب فاصله داخلی هسته می باشد و پتانسیل وابسته به  $\kappa$  در شکل اولیه خود باقی می ماند. اگر نشانه گذاری جدید را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$r = R_0(x+1) \quad \text{و} \quad \alpha = \frac{R_0}{a} \quad (10)$$

بسط عبارت گریز از مرکز به صورت سری تیلور حول  $x=0$  ( $r = R_0$ ) به صورت زیر است:

$$\frac{\kappa(\kappa-1)}{r^2} = \frac{\kappa(\kappa-1)}{R_0^2} \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{\kappa(\kappa-1)}{R_0^2} (1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots) \quad (11)$$

که بر اساس تقریب پکریس، به صورت زیر بیان می شود:

$$\frac{\kappa(\kappa-1)}{r^2} = \frac{\kappa(\kappa-1)}{R_0^2} \left(C_0 + \frac{C_1}{1 + \exp(\alpha x)} + \frac{C_2}{(1 + \exp(\alpha x))^2}\right) \quad (12)$$

بیان این نکته دارای اهمیت است که این تقریب تنها برای ترازهای انرژی پایین دارای اعتبار می باشد و پارامترهای  $C_0$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  مقادیر ثابتند. با بسط این پتانسیل به صورت سری تیلور حول نقطه  $x = 0, (r = R_0)$  خواهیم داشت:

$$\frac{\kappa(\kappa-1)}{r^2} = \delta(C_0 + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{4} - \frac{\alpha}{4}(C_1 + C_2)x + \frac{\alpha^2}{16}C_2x^2 + \frac{\alpha^3}{48}(C_1 + C_2)x^3 - \frac{\alpha^4}{96}C_2x^4 + \dots) \quad (13)$$

که در اینجا:

$$\delta = \frac{\kappa(\kappa-1)}{R_0^2} \quad (14)$$

با مقایسه توان های برابر X در معادله های (۱۳) و (۱۱) می توان ضرایب بسط  $C_0$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  را به دست آورد:

$$C_0 = 1 - \frac{4}{\alpha} + \frac{12}{\alpha^2}, \quad C_1 = \frac{8}{\alpha} - \frac{48}{\alpha^2}, \quad C_2 = \frac{48}{\alpha^2} \quad (15)$$

حال، معادله (۱۲) را در معادله (۹) جایگذاری می کنیم و در نظر گرفتن متغیر Z، به صورت  $z = e^{\alpha x}$ ، معادله درجه دوم برای مولفه پایینی معادله دیراک به صورت زیر خواهد بود:

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + \frac{(1+z)}{z(1+z)}\frac{d}{dz}\right)G(z) - \frac{1}{z^2\alpha^2} \left[ \delta C_0 + \frac{\delta C_1}{1+z} + \frac{\delta C_2}{(1+z)^2} + \frac{1}{\hbar^2 c^2} \left( Mc^2 + E_{n,\kappa} - \frac{2V_0}{1+z} \right) (Mc^2 - E_{n,\kappa} + C_{ps}) \right] G(z) = 0 \quad (16)$$

که با استفاده از روش پارامتری NU معادله ویژه مقدری به صورت زیر به دست می آید:

$$-n - \frac{1}{2}(2n+1) + (2n+1) \left( \sqrt{\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \frac{1}{4}} - \sqrt{\xi_3} \right) - n(n-1) - \xi_2 - 2\xi_3 + 2\sqrt{\xi_3} \left( \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \frac{1}{4} \right) = 0 \quad (17)$$

که در آن :

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -\frac{R_0^2(\hbar^2 c^2 \delta C_0 + (Mc^2 - E_{n,\kappa} + C_{ps})(Mc^2 + E_{n,\kappa}))}{\hbar^2 c^2 \alpha^2} \\ \xi_2 &= \frac{R_0^2(\hbar^2 c^2 (2\delta C_0 + \delta C_1) + 2(Mc^2 + E_{n,\kappa} - V_0)(Mc^2 - E_{n,\kappa} + C_{ps}))}{\hbar^2 c^2 \alpha^2} \\ \xi_3 &= -\frac{R_0^2(\hbar^2 c^2 (\delta C_0 + \delta C_1 + \delta C_2) + (Mc^2 - E_{n,\kappa} + C_{ps})(Mc^2 + E_{n,\kappa} - 2V_0))}{\hbar^2 c^2 \alpha^2} \end{aligned} \quad (18)$$

و با حل این معادله جبری، مقادیر  $E_{n,\kappa}$  بر حسب مقادیر  $n$  و  $\kappa$  به دست می آید. توابع موج برای مولفه پایینی دیراک نیز به صورت زیر به دست می آیند:

$$G_{n,\kappa}(z) = z \sqrt{\xi_3} (1+z)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{4} + \xi_1 + \xi_2 + \xi_3} P_n \left( 2\sqrt{\xi_3}, -2\sqrt{\frac{1}{4} + \xi_1 + \xi_2 + \xi_3} - 2 \right) (1+2z) \quad (19)$$

که معادل آن عبارت است از:

$$G_{n,\kappa}(r) = e^{\sqrt{\xi_3}(r-R_0)/a} (1+e^{(r-R_0)/a})^{-1/2} \sqrt{\frac{1+\xi_1+\xi_2+\xi_3}{4}} \times \quad (20)$$

$$P_n (2\sqrt{\xi_3}, -2\sqrt{\frac{1+\xi_1+\xi_2+\xi_3}{4}} - 2) (1+2e^{(r-R_0)/a})$$

و مولفه بالای دیراک هم از رابطه زیر به دست می آید:

$$F_{n,\kappa}(r) = \frac{\hbar c}{Mc^2 - E_{n,\kappa} + C_{ps}} \left( \frac{d}{dr} - \frac{\kappa}{r} \right) G_{n,\kappa}(r) \quad (21)$$

حال می توان به کمک معادله (۱۷) به بررسی حالت پایه برخی از ایزوتوپ های کربن پرداخت. برای محاسبه انرژی حالت پایه  $M$  برابر با جرم نوترون و  $a$  پارامتر ضخامت پوست بین  $0/2 \text{ fm}^{-1}$  تا  $0/5 \text{ fm}^{-1}$  در نظر گرفته شده است. کمیت  $R_0$  شعاع باری هر ایزوتوپ بوده که از رابطه  $R_0 = 1.2A^{1/3}$  (عدد جرمی هر ایزوتوپ) محاسبه شده است. در این محاسبات، مقدار  $V_0$  بین  $50 \text{ MeV}$  تا  $55 \text{ MeV}$  و کمیت ثابت  $C_{ps}$  در محدوده  $-420(\text{MeV})$  تا  $-500(\text{MeV})$  می باشد. این دو کمیت به صورت افزایشی و متناسب با تعداد نوکلئون ها می باشد. در ایزوتوپهای  $^9\text{C}$  و  $^{11}\text{C}$  اسپین و پاریته حالت پایه برابر  $3/2^-$  است، بنابراین مقادیر  $n=1$  و  $\kappa=-2$  می باشد. حالت پایه ایزوتوپهای  $^{13}\text{C}$  و  $^{15}\text{C}$  نیز به ترتیب دارای اسپین و پاریته  $1/2^-$  و  $1/2^+$  است که بیانگر مقدار  $n=1$  و  $\kappa=1$  برای ایزوتوپ  $^{13}\text{C}$  و مقدار  $n=2$  و  $\kappa=0$  برای ایزوتوپ  $^{15}\text{C}$  است. مقادیر انرژی حالت پایه در واحد  $\text{MeV}$  برای ایزوتوپهای مختلف کربن با پتانسیل وود- ساکسون و با در نظر گرفتن شرط تقارن شبه اسپینی محاسبه شده است که نتایج آن در جدول ۱ با نتایج تجربی مقایسه شده است.

جدول شماره (۱): مقایسه انرژی محاسبه شده برای تراز حالت پایه ایزوتوپهای مختلف کربن با نتایج تجربی

ISOTOPE	n, $\kappa$	(l,j)	R (fm)	$V_0(\text{MeV})$	$C_{p.s.}(\text{MeV})$	$E_{G.S.}(\text{MeV})$ محاسباتی	$E_{G.S.}(\text{MeV})$ تجربی
$^9\text{C}$	1,-2	$1P_{3/2}$	2/496	50/040	-433/800	-38/992	-39/033
$^{11}\text{C}$	1,-2	$1P_{3/2}$	2/669	51/260	-457/600	-66/655	-66/748
$^{13}\text{C}$	1,1	$1P_{1/2}$	2/822	53/450	-482/600	-98/931	-97/097
$^{15}\text{C}$	2,-1	$2S_{1/2}$	2/959	54/020	-489/900	-106/108	-106/500

### بحث و نتیجه گیری :

بررسی ها نشان می دهد مقادیر محاسباتی اختلاف کمی با مقادیر تجربی دارد که می تواند ناشی از برهمکنش اسپین - مدار و یا پتانسیل تانسوری باشد. به دلیل وجود جمله پتانسیل برداری و پتانسیل نرده ای در معادله نسبیتی دیراک، تئوری میدان میانگین نسبیتی در مقایسه با تئوری میدان میانگین غیر نسبیتی، می

تواند ویژگی‌های واقعی اشباع هسته‌ای را در ماده‌ی هسته‌ای باز تولید کند. نتایج به دست آمده در این بررسی نیز نشان می‌دهد، مدل نسبیتی ذره منفرد برای مطالعه هسته‌های زوج-فرد که با اضافه کردن یک نوکلئون و یا یک حفره به نزدیک‌ترین هسته زوج-زوج به دست می‌آیند، بسیار مناسب است.

#### مراجع :

- [1] W. Wiechert and A. A. de Graaf, *Biotechnol. Bioeng.*, vol. 55, no. 1, pp. 101–117, 1997.
- [2] P. Kowalczyk, A. P. Terzyk, P. A. Gauden, S. Furmaniak, K. Kaneko, and T. F. Miller III, *J. Phys. Chem. Lett.*, vol. 6, no. 17, pp. 3367–3372, 2015.
- [3] B. Pritychenko, A. A. Sonzogni, D. F. Winchell, V. V. Zerkin, R. Arcilla, T. W. , *Ann. Nucl. Energy*, vol. 33, no. 4, pp. 390–399, 2006.
- [4] H. Feizi, M. R. Shojaei, and A. A. Rajabi, *Eur. Phys. J. Plus*, vol. 127, no. 4, pp. 1–7, 2012.
- [5] C. L. Pekeris, *Phys. Rev.*, vol. 45, no. 2, p. 98, 1934.
- [6] R. D. Woods and D. S. Saxon, *Phys. Rev.*, vol. 95, no. 2, p. 577, 1954.
- [7] J. N. Ginocchio, *Phys. Rep.*, vol. 414, no. 4, pp. 165–261, 2005.