

گرمای واپاشی آلفازای ایزوتوپهای کوریم با $A=233-251$ به کمک روشهای تعمیم یافته بث ویزساکر

مسعود صیدی*، زهرا کرم بیگی

*. گروه فیزیک، دانشکده علوم، صندوق پستی: ۶۹۳۱۵-۵۱۶، دانشگاه ایلام

چکیده

انرژی پیوندی نوکلئونها در هسته ها نقش مهمی را در واپاشی خودبخودی آلفازای هسته های سنگین و فوق سنگین ایفا میکنند. در این پژوهش از روشهای BW ، $NBWW1$ ، $NBWW2$ ، $IBWW1$ و $IBWW2$ برای محاسبه انرژی پیوندی زنجیره ایزوتوپی کوریم (${}_{96}Cm$) استفاده شده است و نتایج هر کدام از روشهای بالا با مقادیر تجربی مقایسه و تحلیل شده است. محاسبات عددی نشان میدهند که نتایج تئوری با نتایج تجربی همخوانی خیلی خوبی دارند. انحراف میانگین و ریشه مربعی انحراف از مقادیر تجربی انرژی پیوندی حاکی از این است که بهترین روش برای مطالعه این زنجیره، روش $INBWW2$ میباشد.

کلیدواژگان: انرژی پیوندی، زنجیره ایزوتوپی کوریم، واپاشی آلفازا

مقدمه

در محاسبات سطح مقطع های واکنش، انرژیهای پیوندی هسته های ناشناخته کلید کمیات ورودی در مدل های واکنش هسته ای می باشند. بنابراین تخمین خیلی دقیق انرژیهای پیوندی هسته های ناشناخته نه فقط در تخمین نیمه عمر هسته های ناشناخته بلکه برای تخمین سطح مقطع تولید هسته های فوق سنگین حائز اهمیت می باشند [1]. از زمان کشف نوترون فیزیکدانان هسته ای وقت بسیار زیادی را در جهت ارائه مدل های مختلف و دقیق برآورد انرژیهای پیوندی هسته ها صرف کرده اند [2-4]. اولین مطالعات روی جرم هسته ای، فرمول نیمه تجربی جرمی پیشنهاد شده توسط ویزساکر¹ و بث² در اواسط دهه ۱۹۳۰ می باشد [2,3]. تعداد زیادی مدل جرمی از گذشته تا حال وجود دارد که تقریباً کل محدوده اعداد Z و A پوشش می دهند. یک مرور کامل روی این مدلها توسط هاوسین³ در سال ۱۹۸۹ انجام شد [5,6]. پیشرفت های انجام شده در زمینه جرم هسته ها تا سال ۲۰۰۵ را می توان در مقاله مروری میتینگ⁴ و همکاران [7] و لانی⁵ و همکاران [8] و آودی⁶ و همکاران [9] مشاهده کرد. سویستکی⁷ و همکاران و مولر⁸ و همکاران اولین پیشگامان در حوزه کارهای محاسباتی انرژی های

1. Weizsacker
2. Bethe
3. Haustion
4. Mitting
5. Lunney
6. Audi
7. Swiztecki
8. Moller

پیوندی هسته‌ها می‌باشند [10-12]. مایر^۹ و سویسکی انرژیهای پیوندی بسیاری از هسته‌ها را به کمک مدل توماس- فرمی محاسبه کردند. مولر و همکاران [12] خواص حالت پایه هسته‌ها را با استفاده از مدل قطره‌ای با برد محدود و پتانسیل تک ذره ای فولد شده یوکارا، محاسبه کرده‌اند. محاسبات میدان میانگین خودسازگار همچنین برای توصیف خواص بسیاری از هسته‌ها در حالت پایه انجام شده است [13]. این روشها، در پیش بینی انرژی پیوندی بسیار دقیق هستند به طوری که می‌توان به کمک آنها انرژیهای پیوندی عناصر ترانس اورانیوم را پیش بینی کرد. که البته باید توجه کرد که آزمایشات مربوط به اندازه گیری انرژیهای پیوندی عناصر ترانس اورانیوم و هسته‌های فوق سنگین بسیار پرهزینه می‌باشند [14]. در این تحقیق ما سعی کردیم مدل‌های نیمه تجربی محاسبه انرژی پیوندی مرتبط با فرمول بث - ویزساکر (BW) را بررسی کرده و به کمک آنها گرمای واپاشی زنجیره ایزوتوپی کوریم را محاسبه کنیم.

روابط نیمه تجربی انرژی پیوندی:

نقطه آغاز مطلب با فرمول مشهور ویز ساکر و بث (BW) برای انرژیهای پیوندی هسته‌ها آغاز می‌شود [2,15]:

$$B(A, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_a \left(\frac{A}{Z} - Z \right)^2 \frac{1}{A} + a_p \frac{\delta}{\sqrt{A}} \quad (1)$$

در فرمول بالا a_p, a_a, a_c, a_s, a_v متناظر هستند با ضرایب انرژی حجمی، انرژی سطحی، انرژی کولمبی، انرژی عدم تقارنی و انرژی جفت شدگی که:

$$\delta = \{1(Z-e, N-e), 0(Z-e, N-o), 0(Z-o, N-e), -1(Z-o, N-o)\} \quad (2)$$

معمولاً مقادیر ثابت معادله با فیت کردن داده‌های تجربی انرژیهای پیوندی هسته‌ها محاسبه شده‌اند. برای هسته‌های با $Z \geq 90$ و $N \geq 140$ ، حدود ۱۱۷ داده تجربی از انرژیهای پیوندی در دسترس می‌باشد [1]. با فیت کردن مقادیر این هسته، یک مجموعه جدیدی از پارامترها برای فرمول BW بدست می‌آید. ضرایب ثابت معادله (۱) برای این تعداد هسته عبارتند از:

$$\{a_v = 15.7236, a_s = 17.7523, a_c = 0.7062, a_a = 96.2350, a_p = 10.6028\} \quad (3)$$

توجه شود تمام ضرایب ثابت معادلات برحسب MeV میباشند. میانگین انحراف و جذر میانگین مربعی انحراف انرژیهای پیوندی به ترتیب عبارتند از: $0.227 MeV$ و $0.290 MeV$. در محاسبه انرژیهای پیوندی هسته‌های با $Z \geq 90$ و $N \geq 140$ با رابطه (۱) هیچ یک از اثرات لایه ای گنجانده نشده است. در شکل جدید فرمول ویز ساکر و بث دو جمله دیگر را که ناشی از اثرات لایه ای می‌باشند به رابطه (۱) اضافه شده است. بنابراین شکل جدید فرمول ویز ساکر و بث (NBWV1) برای انرژی پیوندی هسته‌ها به صورت زیر می‌باشد [1]:

$$B(A, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - \frac{a_c Z^2}{A^{1/3}} - \frac{a_a}{A} \left(\frac{A}{Z} - Z \right)^2 + \frac{a_p \delta}{\sqrt{A}} + a_6 \frac{|A-252|}{A} - a_7 \frac{|N-152|}{N} \quad (4)$$

با فیت کردن داده‌های تجربی ۱۱۷ هسته ثابتهای معادله جدید به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$a_v = 15.65636, a_p = 10.45136, a_s = 17.15717, a_6 = 5.9427, a_c = 0.70887, a_7 = 23.1377, a_a = 97.15094 \quad (5)$$

⁹. Myers

میانگین انحراف و ریشه میانگین مربعی انحراف فرمول NBWV1 به ترتیب برابر است با: 0.118 MeV و 0.150 MeV . جالب توجه است که در اینجا با در نظر گرفتن اثرات لایه ای انحراف میانگین به نصف کاهش یافته است. بعد از مقایسه انرژیهای پیوندی محاسبه شده با داده های تجربی، می توان تغییرات انرژیهای واپاشی آلفا و انرژیهای جدایی تک پروتون از هسته های سنگین با $Z \geq 90$ را محاسبه کرد.

در ادامه ورژن دیگری از فرمول NBWV1 ارائه می شود که در آن از تعداد ۱۸۱ هسته در فرایند فیت کردن استفاده شده است [1]. در اینجا چون محدوده جرمی گسترده تر شده و همچنین شامل هسته های حول و حوش عدد جادویی $N = 126$ نیز می باشد لذا برای کاهش انحراف کل بین داده های تجربی و محاسبه شده جمله دیگری به فرمول جدید اعمال شده است. فرمول بدست آمده در این بخش به ورژن دوم فرمول جدید (NBWV2) معروف است و به صورت زیر می باشد:

$$B(A, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - \frac{a_c Z^2}{A^{1/3}} - a_a \left(\frac{A}{Z} - Z \right)^2 + a_p \delta A^{-1/2} + a_6 \frac{|A-252|}{A} - a_7 \frac{|N-152|}{N} + \frac{a_8}{(A-214)^2 - a_9} \quad (6)$$

این جمله شبیه سازی ای از اثر لایه ای کروی حول حوش ^{216}Th می باشد. مقادیر پارامترهای بدست آمده از فیت کردن ۱۸۱ داده از هسته های در محدوده ^{206}Th تا ^{264}Hs عبارتند از [1]:

$$a_v = 15.63284, a_p = 11.46055, a_s = 17.23767, a_c = 5.92378, a_7 = 30.70391, a_6 = 0.70479 \quad (7)$$

$$a_8 = 296.192, a_a = 96.1935, a_9 = 43.997$$

میانگین انحراف و ریشه میانگین مربعی انحراف ۱۸۱ هسته بصورت زیر می باشد:

$$\sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{1}{181} \sum_{i=1}^{181} (B_{\text{exp}}^i - B_{\text{cal}}^i)^2} = 0.370 \text{ MeV} \quad \langle \sigma \rangle = \frac{1}{181} \sum_{i=1}^{181} |B_{\text{exp}}^i - B_{\text{cal}}^i| = 0.269 \text{ MeV} \quad (8)$$

این انحرافات کمی بیشتر از مورد قبلی می باشند و این طبیعی است چرا که در اینجا ۱۸۱ هسته در نظر گرفته شده است. فرمول NBWV1 یک رابطه موضعی است که در آن اثرات لایه ای نزدیک $N = 152$ به وسیله جملات تحلیلی توصیف شده است. از آنجایی که انحرافات منظمی بین انرژیهای پیوندی تجربی و تئوری وجود دارد، ممکن است برای بهبود بخشیدن به فرمول NBWV1 اقدام به حذف این انحراف های منظم نمود. به منظور توصیف انرژیهای پیوندی اضافی هسته های نزدیک خط $N - Z = 50$ یک جمله جدید $|N - Z - 50|/A$ به فرمول NBWV1 افزوده می شود. این جمله مشابه است با جمله ویگنر^{۱۰} که به فرمول جرمی مایر و سویتسکی [2] اضافه شد. بنابراین فرمول موضعی بهبود یافته انرژی پیوندی (IBWV1) به صورت زیر می باشد [16]:

$$B(A, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - \frac{a_c Z^2}{A^{1/3}} - a_a \left(\frac{A}{Z} - Z \right)^2 \frac{1}{A} + \frac{a_p}{\sqrt{A}} + a_6 \frac{|A-252|}{A} - a_7 \frac{|N-152|}{N} + a_8 \frac{|N-Z-50|}{A} \quad (9)$$

به کمک فرمول IBWV1 می توان بهترین فیت را بین ۱۱۷ هسته با $Z \geq 90$ و $N \geq 140$ را انجام داد و این پارامترها عبارتند از:

$$a_v = 15.8032, a_6 = 5.33, a_s = 17.8147, a_7 = 21.0, a_c = 0.71478, a_8 = -15.25, a_a = 97.6619 \quad (10)$$

ضریب انرژی جفت شدگی در فرمول IBWV1 برابر است با:

$$a_p = \{12.66 (Z-e, N-e), 3.9(Z-e, N-o), 0(Z-o, N-e), -8.0(Z-o, N-o)\} \quad (11)$$

¹⁰ Wigner

می توان دید که انرژی جفت شدگی برای هسته های زوج- فرد کمی بیشتر از هسته های فرد- زوج می باشد. این یعنی میانگین انرژی جفت شدگی پروتون- پروتون بیشتر از میانگین انرژی جفت شدگی نوترون- نوترون می باشد. میانگین انحراف و جذر میانگین مربعی انحراف از انرژیهای پیوندی برای ۱۱۷ هسته با $Z \geq 90$ و $N \geq 140$ محاسبه شده از فرمول IBWV1 به ترتیب عبارتند از: $0.086 MeV$ و $0.105 MeV$.

بعد از تحلیل توزیع جملات مختلف در فرمول IBWV1 می توان دریافت که جمله $|A-252|/A$ سهم جزئی ای در انرژی پیوندی دارد که می توان از آن چشم پوشی کرد. بعلاوه برای توصیف بهتری از انرژیهای پیوندی هسته های نزدیک خط $N-Z-50=0$ میتوان جمله آخر فرمول IBWV1 را به صورت زیر تغییر داد:

$$(|N-Z-50|+|N-Z-52|)/2A$$

با این تفکر ورژن جدید فرمول بهبود یافته فرمول انرژی پیوندی (IBWV2) به صورت زیر حاصل می شود [17]:

$$B(Z, A) = a_v A - a_s A^{2/3} - \frac{a_c Z^2}{A^{1/3}} - a_a \left(\frac{A}{Z} - Z\right)^2 \frac{1}{A} + a_7 \left(\frac{|N-Z-50|}{A} + \frac{|N-Z-52|}{A}\right) \frac{1}{2} + \frac{a_p}{\sqrt{A}} + a_6 \frac{|N-152|}{N} \quad (12)$$

این فرمول اساساً میکروسکوپی است، زیرا از تصحیحات میکروسکوپی لابه ای و جفت شدگی حاصل شده است. بهترین فیت از فرمول (12) پارامترهای زیر را می دهد:

$$a_v = 15.6044, a_s = 96.45512, a_c = 16.98337, a_6 = 17.2697, a_e = 0.70614, a_7 = 18.36109 \quad (13)$$

و مقدار ثابت جفت شدگی عبارت است از:

$$a_p = \{12.935(Z-e, N-e), 3.101(Z-e, N-o), 0.115(Z-o, N-e), -7.554(Z-o, N-o)\} \quad (14)$$

انحرافات استاندارد و متوسط برای ۱۳۴ هسته با فرمول IBWV2 به ترتیب برابرند با: $0.081 MeV$ و $0.103 MeV$.

نتایج:

در این پژوهش تمام داده های تجربی از منبع [18] گرفته شده و همچنین تمام محاسبات عددی با MATLAB انجام شده است. در جدول ۱ مقادیر گرمای واپاشی آغازی محاسبه شده زنجیره ایزوتوپی Cm_{96} با روشهای BW، NBWV1، NBWV2، IBWV1 و IBWV2 داده شده است.

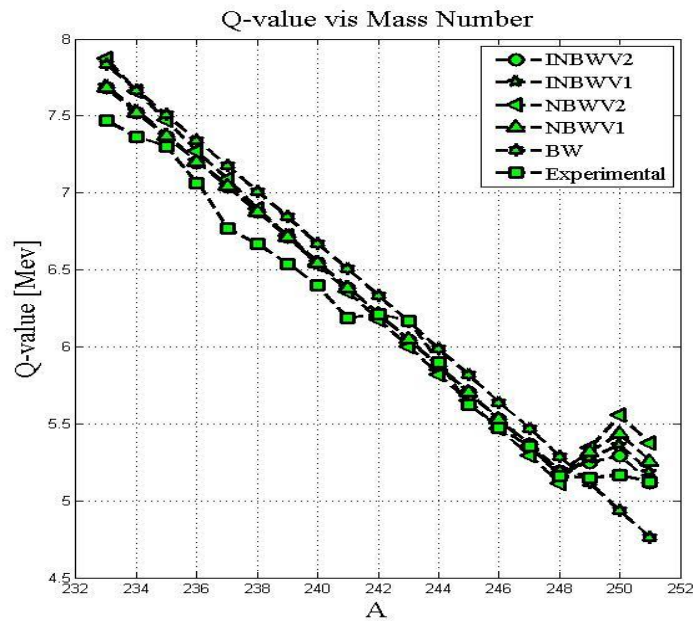
جدول ۱. مقادیر انرژی واپاشی آغازی زنجیره کوریم

A	Q_{exp}	Q_{BW}	Q_{NBWV1}	Q_{NBWV2}	Q_{IBWV1}	Q_{IBWV2}
233	7.4700	7.8335	7.6856	7.8718	7.6953	7.6829
234	7.3650	7.6656	7.5214	7.6607	7.5311	7.5191
235	7.3000	7.5084	7.3677	7.4692	7.3764	7.3649
236	7.0670	7.3381	7.2009	7.2700	7.2096	7.1986
237	6.7700	7.1784	7.0445	7.0878	7.0522	7.0418
238	6.6700	7.0059	6.8752	6.8960	6.8828	6.8731
239	6.5400	6.8440	6.7163	6.7193	6.7230	6.7138
240	6.3978	6.6694	6.5448	6.5318	6.5513	6.5430
241	6.1852	6.5054	6.3837	6.3583	6.3891	6.3815
242	6.2156	6.3290	6.2101	6.1734	6.2154	6.2086
243	6.1688	6.1631	6.0468	6.0017	6.0490	6.0458
244	5.9017	5.9850	5.8713	5.8181	5.8712	5.8716
245	5.6230	5.8173	5.7061	5.6471	5.7029	5.7075
246	5.4751	5.6376	5.5289	5.4642	5.5235	5.5322
247	5.3540	5.4683	5.3618	5.2934	5.3534	5.3663
248	5.1617	5.2872	5.1830	5.1106	5.1724	5.1895
249	5.1470	5.1164	5.3168	5.3410	5.2752	5.2477
250	5.1690	4.9340	5.4351	5.5542	5.3638	5.2923
251	5.1200	4.7618	5.2571	5.3724	5.1836	5.1174

با استفاده از مقادیر جدول ۱ میتوان درصد خطای نسبی هر روش از مقدار تجربی برای هر یک از ایزوتوپها را محاسبه کرد، نتایج حاصل از این محاسبات در جدول ۲ داده شده است. با توجه به شکل ۱ میتوان گفت که غیر از رابطه BW سایر روابط در این محدوده جرمی رفتار غیرخطی دارند. کمترین انحراف میانگین و انحراف معیار در پیش بینی گرمای واپاشی آغازی مربوط به روش INBWW2 میباشد که نتایج آن در جدول ۳ داده شده است.

جدول ۲. درصد خطای نسبی هر روش از مقدار تجربی

A	PRE_{exp}^{BW}	PRE_{exp}^{NBWV1}	PRE_{exp}^{NBWV2}	PRE_{exp}^{INBWV1}	PRE_{exp}^{INBWV2}
233	4.8660	2.8861	5.3790	3.0162	2.8499
234	4.0810	2.1238	4.0145	2.2553	2.0923
235	2.8545	0.9272	2.3175	1.0470	0.8892
236	3.8355	1.8944	2.8730	2.0172	1.8616
237	<u>6.0328</u>	<u>4.0542</u>	<u>4.6940</u>	<u>4.1681</u>	<u>4.0143</u>
238	5.0359	3.0768	3.3879	3.1909	3.0443
239	4.6482	2.6962	2.7408	2.7974	2.6582
240	4.2458	2.2983	2.0950	2.3997	2.2688
241	5.1776	3.2085	2.7990	3.2970	3.1741
242	1.8255	0.0879	0.6776	0.0024	0.1116
243	0.0923	1.9779	2.7095	1.9426	1.9945
244	1.4104	0.5152	1.4165	0.5166	0.5101
245	3.4552	1.4773	0.4293	1.4210	1.5024
246	2.9680	0.9823	0.1986	0.8838	1.0438
247	2.1346	0.1460	1.1315	0.0114	0.2301
248	2.4304	0.4129	0.9900	0.2072	0.5382
249	0.5949	3.2987	3.7690	2.4914	1.9564
250	4.5465	5.1478	7.4517	3.7687	2.3846
251	6.9954	2.6776	4.9304	1.2418	0.0507

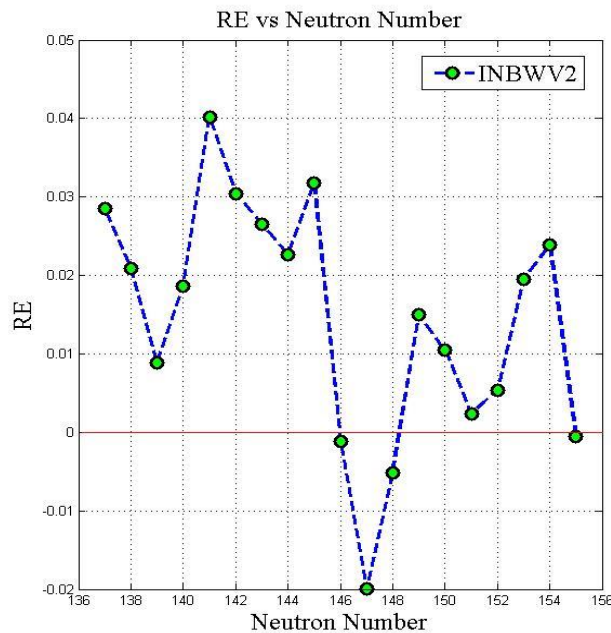


شکل ۱. مقادیر انرژی واپاشی آلفای ایزوتوپهای کوریم

جدول ۳. میانگین انحراف و ریشه میانگین مربعی انحراف از مقادیر تجربی

روش	$\langle \sigma \rangle$	$\sqrt{\sigma^2}$
<i>BW</i>	0.2214	0.2497
<i>NBWV1</i>	0.1301	0.1535
<i>NBWV2</i>	0.1774	0.2108
<i>IBWV1</i>	0.1222	0.1470
<i>IBWV2</i>	0.1117	0.1354

از بین ایزوتوپهای *Cm* بیشترین درصد خطای نسبی مربوط به ایزوتوپ به $N = 141$ میباشد و مقدار آن برابر است با: $PRE = 4.0143$ (جدول ۲ و شکل ۲). در اینجا بیشترین انحراف از مقدار تجربی برابر 0.2718 MeV میباشد.



شکل ۲. خطای نسبی گرمای واپاشی آلفازای محاسبه شده با روش *INBWV2*.

نتایج عددی بدست آمده، از این جهت مهم است که صحت آزمایشات فیزیکدانان تجربی بدون صرف هزینه و وقت، بار دیگر مورد آزمایش قرار میگیرد و نیاز مجدد به تکرار آزمایشات پیچیده و پرهزینه تا حدود زیادی مرتفع میگردد. مسئله اعداد جادویی بالای $N = 126$ هنوز یک مسئله باز است و به طور دقیق فیزیکدانان تجربی روی اعداد خاص اجماع ندارند. با اینحال عدد $N = 152$ به عنوان یک عدد جادویی مورد تأیید بسیاری از فیزیکدانان تجربی است. این تنها عدد جادویی بعد از $N = 126$ میباشد. از شکل ۲ مشاهده میشود که بیشترین خطای نسبی حول حوش $N = 141$ اتفاق افتاده است. بنابراین حول و حوش این عدد تغییراتی در ساختار شکلی هسته میافتد که صرفاً متأثر از اثرات لایه ای نیست. با توجه به اینکه در هسته های سنگین با $Z \geq 90$ متوسط انرژیهای پیوندی برای هر زنجیره ایزوتوپی

معمولاً دور از خط پایداری β^- قرار میگیرند لذا این هسته ها ناپایدارند و دارای نیمه عمر های کوتاهی میباشند. در این ناحیه جرمی فرایند های واپاشی بتا و شکافت خودبخودی نیز میتوانند رقیب های دیگری برای فرایند واپاشی آلفا باشند. این مدهای واپاشی تا حدودی روی انرژی پیوندی نوکلئونها و احتمال واپاشی آلفا تأثیر میگذارند. بعلاوه برای هسته های با $Z \geq 90$ ، در طول هر زنجیره تغییر شکل های هسته میتواند منجر به گذار فاز شکلی از حالت کروی پایدار به حالت های کشیده شده، پخت یا گامای ناپایدار شود [19-21].

نتیجه گیری

با توجه به محاسبات انجام شده بهترین مدل برای بررسی گرمای واپاشی زنجیره ${}^{233-251}\text{Cm}_{96}$ روش INBW2 است. نتایج این روش در مقایسه با روشهای دیگر همخوانی بهتری با نتایج تجربی دارد. در این مدل با اضافه کردن جمله $(|N - Z - 50| + |N - Z - 52|) / 2A$ که منشاء آن تصحیحات لایه ای بود تا حدودی مقدار خطا کاهش یافت. بیشترین انحراف از مقادیر تجربی از بین هسته های این زنجیره مربوط به هسته $N = 141$ بود. با بررسی تغییرات شکلی این هسته ها در طول زنجیره با کمک مدل های جمعی میتوان این انحرافات را توضیح داد.

منابع

- [1]: T. Dong and Z. Ren, New model of binding energies of heavy nuclei with $Z \geq 90$, PHYSICAL REVIEW C, 72 (2005) 064331-42.
- [2]: C. F. Von Weizsacker, Z. Phys. 96, 431 (1935).
- [3]: H. A. Bethe and R. F. Bacher, Rev. Mod. Phys. 8, 82 (1936).
- [4]: A. Bohr and B. R. Mottelson, *Nuclear Structure* (W. A. Benjamin, New York, 1975), Vol. 1.
- [5]: P. E. Haustein, special editor, At. Data Nucl. Data Tables 39, 185 (1988).
- [6]: P. E. Haustein, in *Particle Emission from Nuclei* (CRC Press, Boca Raton, 1989), Vol. 1, p. 233.
- [7]: W. Mittig, A. Lepine-Szily, and N. A. Orr, Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. 47, 27 (1997).
- [8]: D. Lunney, J. M. Pearson, and C. Thibault, Rev. Mod. Phys. 75, 1021 (2003).
- [9]: G. Audi, A. H. Wapstra, and C. Thibault, Nucl. Phys. A729, 337 (2003).
- [10]: W. D. Myers and W. J. Swiatecki, Phys. Rev. C 58, 3368 (1998).
- [11]: P. Moller, J. R. Nix, W. D. Myers, and W. J. Swiatecki, At. Data Nucl. Data Tables 59, 185 (1995).
- [12]: P. Moller, J. R. Nix, and K. L. Kratz, At. Data Nucl. Data Tables 66, 131 (1997).
- [13]: Z. Ren, F. Tai, and D.-H. Chen, Phys. Rev. C 66, 064306 (2002).
- [14]: S. Hofmann and G. Muenzenberg, Rev. Mod. Phys. 72, 733 (2000).
- [15]: J. Lilley, *Nuclear Physics* (Wiley, Chichester, 2002), pp. 38-41.
- [16]: T. Dong and Z. Ren, Improved version of a binding energy formula for heavy and Super heavy nuclei with $Z \geq 90$ and $N \geq 90$, PHYSICAL REVIEW C, 77 (2008) 064310-18.
- [17]: D. Ni, Z. Ren, Binding energies, α -decay energies, and α -decay half-lives for heavy and superheavy nuclei, Nuclear Physics A, 893 (2012) 13-26.



- [18]: National Nuclear Data Center (Brookhaven National Laboratory), chart of nuclides, <http://www.nndc.bnl.gov/chart>.
- [19]: E. Santapinto, R. Bijker and F. Iachello, *J. Math. Phys.* 37 (1996) 2674.
- [20]: Feng Pan, J.P. Draayer, *Nuclear Physics A* 636 (1998) 156.
- [21]: J. M. Arias, *Phys. Rev. C* 63 (2001) 034308.