محاسبه طیف انرژی هسته‌ای با استفاده از مکانیک کوانتومی ابرتقارنی

کوهرخی، طه [1]؛ شیرازی، فهیمه ؛ بافنده، فرانک ؛ گنجی وطن، خدیجه

[1]گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه گلستان، گرگان، کد پستی ۱۵۷۵۹-۴۹۱۳۸

چکیده:

در این مقاله ترازهای انرژی یک هسته دلخواه از طریق حل معادله شرودینگر سه بعدی برای تقارن کروی با استفاده از مکانیک کوانتومی ابرتقارنی مورد بررسی قرار گرفته است. پتانسیل مؤثر به صورت حاصل جمع پتانسیل‌های هسته‌ای، اسپین-مدار، کولنی، اسپین-مدار کولنی و مرکزگریز در نظر گرفته شده است. پتانسیل‌های اسپین-مدار، کولنی، اسپین-مدار کولنی و مرکزگریز با استفاده از تقریب پکریس به نحوی متقارن‌سازی شده‌اند که ابرپتانسیل هسته‌ای مناسب حاصل می‌شود. با استفاده از ابرپتانسیل هسته‌ای و سازوکار سلسله مراتب هامیلتونی برای پتانسیل‌های شکل ناوردا، طیف انرژی به ازای مقادیر مختلف n و l بدست آمده است.

کلمات کلیدی: ابرپتانسیل، پتانسیل وودز- ساکسون، ابرتقارن.

مقدمه :

حل معادله شرودینگر، اطلاعات مورد نیاز از جمله تابع موج و طیف انرژی سیستم کوانتومی مورد نظر را در اختیار می‌گذارد. هسته‌ها، سیستم‌های کوانتومی هستند که با تقریب خوبی از تقارن کروی برخوردارند. با این وجود، تنها برای تعداد اندکی از پتانسیل‌های هسته‌ای معادله شرودینگر پاسخ تحلیلی صریح به ازای همه اعداد کوانتومی n و l مختلف ارائه می‌دهد. استفاده از سازوکار ابرتقارنی در مکانیک کوانتومی یکی از ایده‌های جالب توجهی است که جهت حل این معادله پیشنهاد شده است [۱-۳]. در مکانیک کوانتومی ابرتقارنی، با توجه به تقارن‌های مسأله، ابتدا یک ابرپتانسیل که مستقیماً با پتانسیل سیستم مورد نظر در ارتباط است، بدست می‌آید. با استفاده از ابرپتانسیل بدست آمده اطلاعات مورد نیاز، از جمله تابع موج و طیف انرژی حالت‌های مقید بدست خواهد آمد. در مقاله حاضر، ابتدا پتانسیل مسأله، بدون از دست دادن دقت لازم متقارن‌سازی شده و سپس ابرپتانسیل هسته‌ای بدست می‌آید. با استفاده از این ابرپتانسیل هسته‌ای و سازوکار سلسله مراتب هامیلتونی و ویژگی شکل ناوردای آن، طیف انرژی به ازای مقادیر مختلف n و l بدست آمده است.

متقارن سازی سیستم با استفاده از تقریب پکریس:

پتانسیل مؤثر را به صورت مجموع پنج پتانسیل شامل، پتانسیل هسته‌ای $V_N(r)$، پتانسیل اسپین–مدار هسته‌ای $V_{N-SO}(r)$، پتانسیل کولنی $V_{\mathrm{Coul}}(r)$، پتانسیل اسپین–مدار کولنی $V_{Coul-SO}(r)$ و پتانسیل مرکزگریز $V_{\mathrm{Cef}}(r)$ در نظر گرفته می‌شود:

$$V_{\mathrm{eff}}(r)=V_N(r)+V_{N-SO}(r)+V_{Coul}(r)+V_{Coul-SO}(r)+V_{Cef}(r) \qquad (۱)$$

یک انتخاب مناسب برای پتانسیل هسته‌ای که بیانگر پتانسیل میانگین حاصل از نوکلئون‌های درون هسته است، پتانسیل وودز–ساکسون[1] نامیده می‌شود که رابطه آن به شکل زیر است:

$$V_{\mathrm{N}}(r)=\frac{-V_0}{1+\exp\left[(r-R_0)/a\right]} \qquad (۲)$$

که در این رابطه V_0 عمق چاه پتانسیل هسته‌ای، R_0 شعاع هسته و a پارامتر پخشیدگی سطح هسته می‌باشد.

پتانسیل اسپین–مدار هسته‌ای اغلب به شکل، پتانسیل توماس[2] نوشته می‌شود:

$$V_{N-SO}(r)=\frac{l\,\vec{\mathbf{L}}.\vec{\mathbf{S}}}{2m_p^2c^2}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[\frac{-V_0}{1+\exp\left[(r-R_N)/a\right]}\right] \qquad (۳)$$

در رابطه فوق m_p جرم پروتون و c سرعت نور می‌باشد. همچنین مقدار l برابر است با:

$$l=4\left(\frac{m_p}{M_p}\right)^2 \qquad (٤)$$

که در آن M_p جرم پایون می‌باشد.

همچنین پتانسیل‌های کولنی، اسپین–مدار کولنی و مرکزگریز به ترتیب عبارتند از:

$$V_{\mathrm{Coul}}(r)=\frac{Z_nZ_Ne^2}{r} \qquad (۵)$$

که در آن Z_n بار یک نوکلئون (برای پروتون برابر ۱ و برای نوترون ۰ می‌باشد) و Z_N بار هسته است و [٤]:

$$V_{\mathrm{Coul\text{-}SO}}(r)=\left(m_p-\frac{1}{2M_p^2c^2}\right)\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}V_{\mathrm{Coul}}\right]\vec{\mathbf{L}}.\vec{\mathbf{S}} \qquad (٦)$$

و:

$$V_{\mathrm{Cef}}(r)=\frac{\hbar^2}{2mr^2}l(l+1) \qquad (۷)$$

با استفاده از تغییرمتغیرهای $x=(r-R')/R'$، $\alpha=R'/a$ و $\gamma=\exp\left[(R'-R_0)/a\right]$، پتانسیل‌ها به ترتیب برابر می‌شوند با:

[1] Woods-Saxon
[۲] Thomas

$$\begin{cases} V_{\mathrm{N}}(r) = -\dfrac{V_0}{1+g\exp(ax)}, \quad V_{\mathrm{Coul}}(r) = \dfrac{C}{(1+x)}, \quad V_{\mathrm{Coul\text{-}SO}}(r) = \dfrac{D}{(1+x)^3} \\ V_{\mathrm{N\text{-}SO}}(r) = \dfrac{F}{(1+x)}\left[\dfrac{1}{1+g\exp(ax)} - \dfrac{1}{(1+g\exp(ax))^2}\right], \quad V_{\mathrm{Cef}}(r) = \dfrac{G}{(1+x)^2} \end{cases} \tag{۸}$$

که ضرایب بکار رفته در این روابط عبارتند از:

$$\begin{cases} F = \dfrac{2V_0\mathbf{L.S}}{M_p^2 c^2}\dfrac{1}{R\,a}, \quad C = \dfrac{Z_n Z_N e^2}{R} \\ D = \left(m_p - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{m_p^2 c^2}\left(\dfrac{Z_n Z_N e^2}{R^3}\right)\mathbf{L.S}\right), \quad G = \dfrac{\hbar^2 l(l+1)}{2mR^2} \end{cases} \tag{۹}$$

با جایگذاری پتانسیل‌های رابطه (۸) در رابطه (۱)، پتانسیل مؤثر برابر می‌شود با:

$$V_{\mathrm{eff}}(x) = -\frac{V_0}{1+g\exp(ax)} + \frac{C}{(1+x)} + \frac{D}{(1+x)^3} + \frac{F}{(1+x)}\left[\frac{1}{1+g\exp(ax)} - \frac{1}{(1+g\exp(ax))^2}\right] + \frac{G}{(1+x)^2} \tag{۱۰}$$

به منظور حل معادله شرودینگر از طریق مکانیک کوانتومی ابرتقارنی، پتانسیل مسأله بایستی از تقارن لازم برخوردار باشد. رابطه (۱۰) چنین تقارنی را از خود نشان نمی‌دهد. جهت متقارن‌سازی پتانسیل کل، حاصل‌جمع پتانسیل‌های اسپین–مدار، کولنی، اسپین–مدار کولنی و مرکزگریز:

$$V_{\mathrm{I}}(x) = \frac{C}{(1+x)} + \frac{D}{(1+x)^3} + \frac{F}{(1+x)}\left[\frac{1}{1+g\exp(ax)} - \frac{1}{(1+g\exp(ax))^2}\right] + \frac{G}{(1+x)^2} \tag{۱۱}$$

را با رابطه زیر تقریب می‌زنیم [۵و۶]:

$$V_{Pek}(x) = C_0 + \frac{C_1}{(1+g\exp(ax))} + \frac{C_2}{(1+g\exp(ax))^2} \tag{۱۲}$$

به منظور بدست آوردن ضرایب C_0، C_1 و C_2 در پتانسیل فوق بایستی هر دو پتانسیل، یعنی $V_{\mathrm{I}}(x)$ و $V_{Pek}(x)$ را حول $x=0$ یعنی $r=R'$ بسط داده و سپس با هم برابر قرار دهیم:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{F}{(1+g)} - \frac{F}{(1+g)^2} + C + G + D\right) + \left(\frac{Fga}{(1+g)^2} - \frac{F}{(1+g)} + \frac{F}{(1+g)^2} + \frac{2Fga}{(1+g)^3} - C - 2G - 3D\right)x \\ &+ \left(\frac{F}{(1+g)} - \frac{F}{(1+g)^2} + \frac{g(g-1)a^2F}{2(1+g)^3} - \frac{g(g-1)a^2F}{(1+g)^4} + \frac{Fga}{(1+g)^2} - \frac{2Fga}{(1+g)^3} + C + 3G + 6D\right)x^2 \\ &= C_0 + \frac{C_1}{1+g} + \frac{C_2}{(1+g)^2} - \frac{ag}{(1+g)^2}\left(C_1 + \frac{2C_2}{(1+g)}\right)x + \frac{a^2g}{(1+g)^3}\left(\frac{g-1}{2}C_1 + \frac{(2g-1)}{(1+g)}C_2\right)x^2 \end{aligned} \tag{۱۳}$$

فاصله شعاع R' یک فاصله اختیاری است و طوری انتخاب می‌شود که پتانسیل تقریب زده شده با پتانسیل اصلی کمترین اختلاف را داشته باشد. با برابر قرار دادن ضرایب توان‌های یکسان x از دو طرف تساوی رابطه (۱۳)، ضرایب C_0، C_1 و C_2 بدست می‌آیند. و در نتیجه پتانسیل به شکل زیر متقارن‌سازی می‌شود:

$$V_{\text{eff}}(x)=C_0+\frac{C_1-V_0}{1+\gamma\exp(\alpha x)}+\frac{C_2}{\left(1+\gamma\exp(\alpha x)\right)^2} \qquad (۱٤)$$

مکانیک کوانتومی ابرتقارنی:

مکانیک کوانتومی ابرتقارنی یک روش عملگری مناسب را برای حل دقیق معادله شرودینگر با پتانسیل‌های شکل ناوردا در اختیار می‌گذارد. اکنون به قسمت شعاعی معادله شرودینگر سه بعدی در مختصات کروی باز می‌گردیم:

$$\frac{\mathrm{h}^2}{2\mu R'^2}\frac{d^2u_0(x)}{dx^2}=\left[V_{\text{eff}}(x)-E_0\right]u_0(x) \qquad (۱۵)$$

در این روش، ابرپتانسیل به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$W(x)=-\frac{\hbar}{\sqrt{2\mu R'^2}}\frac{u_0'(x)}{u_0(x)} \qquad (۱٦)$$

با جایگذاری این رابطه در معادله شرودینگر (۱۵) ارتباط بین پتانسیل $V_{\text{eff}}(x)$ و ابرپتانسیل به شکل زیر بدست می‌آید:

$$V_{\text{eff}}(x)-E_0=W^2(x)-\frac{\mathrm{h}}{\sqrt{2\mu R'^2}}W'(x) \qquad (۱۷)$$

اکنون براساس تقارن موجود در پتانسیل $V(x)$ (رابطه (۱٤)) ابرپتانسیل را به شکل زیر فرض می‌کنیم:

$$W(x)=-\frac{\mathrm{h}}{\sqrt{2\mu R'^2}}\left(A-\frac{B}{1+\gamma\exp(\alpha x)}\right) \qquad (۱۸)$$

با جایگذاری رابطه (۱۸) در رابطه (۱۷) روابط زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{h}^2}{2\mu R'^2}A^2=C_0-E_0 & (a)\\ \frac{\mathrm{h}^2}{2\mu R'^2}(\alpha B-2AB)=C_1-V_0 & (b)\\ \frac{\mathrm{h}^2}{2\mu R'^2}\left(B^2-\alpha B\right)=C_2 & (c)\end{cases} \qquad (۱۹)$$

در نتیجه ضرایب A و B به صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$\begin{cases} B=\dfrac{\alpha\pm\sqrt{\alpha^2+4\left(\dfrac{2\mu R'^2}{\mathrm{h}^2}\right)C_2}}{2} & (a) \\ A=\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{2\mu R'^2}{\mathrm{h}^2}\dfrac{(C_1-V_0)}{2B} & (b) \\ A=\dfrac{B}{2}-\dfrac{2\mu R'^2}{\mathrm{h}^2}\dfrac{(C_1+C_2-V_0)}{2B} & (c) \end{cases} \tag{۲۰}$$

در رابطه فوق رابطه c از مجموع دو رابطه ((b)۱۹) و ((c)۱۹) بدست می‌آید. با استفاده از روابط ((a)۱۹) و ((b)۲۰) انرژی حالت پایه E_0 بدست می‌آید:

$$E_0=-\frac{\mathrm{h}^2}{2\mu R'^2}\left[\frac{\alpha}{2}-\frac{2\mu R'^2}{\mathrm{h}^2}\frac{(C_1-V_0)}{2B}\right]^2+C_0 \tag{۲۱}$$

سلسه مراتب پتانسیل‌های شکل ناوردا:

اکنون از روش سلسله مراتب هاملیتونی برای پتانسیل‌های شکل‌ناوردا می‌توانیم طیف انرژی را بدست آوریم. ابتدا با استفاده از ابرپتانسیل بدست آمده پتانسیل‌های $V_1(x)$ و $V_2(x)$ را به ترتیب از روابط زیر بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} V_1(x)=W^2(x)-\dfrac{\mathrm{h}}{\sqrt{2\mu R'^2}}W'(x) \\ V_2(x)=W^2(x)+\dfrac{\mathrm{h}}{\sqrt{2\mu R'^2}}W'(x) \end{cases} \tag{۲۲}$$

با جایگذاری روابط (۱۹) در این روابط داریم:

$$\begin{cases} V_1(x)=\dfrac{\mathrm{h}^2}{2\mu R'^2}\left[A^2+\dfrac{\alpha B-2AB}{1+\gamma\exp(\alpha x)}+\dfrac{B^2-\alpha B}{\left(1+\gamma\exp(\alpha x)\right)^2}\right] \\ V_2(x)=\dfrac{\mathrm{h}^2}{2\mu R'^2}\left[A^2-\dfrac{\alpha B+2AB}{1+\gamma\exp(\alpha x)}+\dfrac{B^2+\alpha B}{\left(1+\gamma\exp(\alpha x)\right)^2}\right] \end{cases} \tag{۲۳}$$

با استفاده از رابطه ((c)۲۰) برای A و تفریق دو پتانسیل به صورت زیر از هم، جمله باقی‌مانده بدست می‌آید:

$$R(B)=V_2(B-\alpha,x)-V_1(B,x)=\frac{\mathrm{h}^2}{2\mu R'^2}\frac{(\alpha^2-2\alpha B)}{4}\left[1-\frac{\left(\dfrac{2\mu R'^2}{\mathrm{h}^2}\right)^2(C_1+C_2-V_0)^2}{B^2(B-\alpha)^2}\right] \tag{۲٤}$$

ملاحظه می‌شود جمله باقی‌مانده به متغیر x بستگی ندارد و درنتیجه دو پتانسیل $V_1(x)$ و $V_2(x)$، شکل ناوردا هستند. $R(B)$ باقیمانده بین دو پتانسیل همزاد اول می‌باشد که چنانچه به انرژی حالت پایه افزوده شود، انرژی اولین حالت برانگیخته بدست می‌آید. در نتیجه، انرژی اولین حالت برانگیخته برابر با $E_1 = E_0 + R(B)$ می‌شود. بدین ترتیب برای محاسبه طیف انرژی کل باید مجموع تمام باقیمانده‌ها را به انرژی حالت پایه بیافزاییم. بنابراین طیف انرژی از رابطه $E_n = E_0 + \sum_{i=1}^{n} R(B_i)$ با $B_i = B - i\alpha$ برابر می‌شود با:

$$\sum_{i=1}^{n} R(B_i) = V_n(B - n\alpha, x) - V_1(B, x) = \frac{\hbar^2}{2\mu R'^2} \frac{\left((n\alpha)^2 - 2n\alpha B\right)}{4} \left[1 - \frac{\left(\frac{2\mu R'^2}{\hbar^2}\right)^2 (C_1 + C_2 - V_0)^2}{B^2 (B - n\alpha)^2}\right]$$

$$E_n = E_0 + \frac{\hbar^2}{2mR'^2} \frac{\left((na)^2 - 2naB\right)}{4} \left[1 - \frac{\left(\frac{2mR'^2}{\hbar^2}\right)^2 (C_1 + C_2 - V_0)^2}{B^2 (B - na)^2}\right] \qquad (۲۵)$$

نتیجه‌گیری:

مکانیک کوانتومی ابرتقارنی روشی را در اختیار می‌گذارد که در آن با استفاده از ملاحظات تقارنی، علاوه بر احراز از پیچیدگی‌های حل معادله شرودینگر، می‌توان ترازهای انرژی و تابع موج یک سیستم کوانتومی شامل یک پتانسیل شکل‌ناوردا را بدست آورد. در این مقاله، از این سازوکار برای برای محاسبه طیف انرژی سیستم‌های هسته‌ای که عموماً با پتانسیل وودز–ساکسون توصیف می‌شوند، استفاده شده است.

مراجع:

[۱] E. Witten, Nuclear Physics B **188**, 513 (1981).
[۲] F. Cooper, A. Khare, and U. Sukhatme, Physics Reports, **251**, 267 (1995).
[۳] C. V. Sukumar, AIP Conference Proceedings **744**, 166 (2004).
[۴] W. Heckrotte. Phys. Rev, **101**, 1406 (1956).
[۵] C. L. Pekeris, Phys. Rev. **45**, 98 (1934).
[۶] S. M. Ikhdair and R. Sever, Cent. Eur. J. Phys. **8(4)**, 652 (2010).