مقایسه دو روش میدان گسترده و شرط مرزی دوقطبی مغناطیسی در حل معادلات الکترومغناطیس مشعل پلاسمای جفت شدهٔ القائی

نیکفرجام، وجیهه* [(۱)]– سادات کیائی، محمود[(۱)]– چخماچی دوم، امیر[(۱)]

[(۱)]سازمان انرژی اتمی ایران، پژوهشگاه علوم و فنون هسته ای، پژوهشکده پلاسما و گداخت هسته ای

چکیده:

در مشعل پلاسمای جفت شدهٔ القائی به دلیل پیچیدگی شرط مرزی پتانسیل برداری، روش استاندارد برای مدلسازیِ رفتار الکترومغناطیسی سیستم، روش تکرار می باشد که از همگرایی پایینی برخوردار است. با افزایش گسترهٔ محاسباتی به خارج از محدودهٔ مشعل، شرط مرزی ساده تری به دست می آید که مسأله را از تکرار بی نیاز می‌سازد. به کمک نرم افزار FlexPDE5 رفتار الکترومغناطیسی مشعل پلاسمای جفت شدهٔ القائی در دو بعد به روش میدان گسترده و شرط مرزی دوقطبی مغناطیسی، مدلسازی و نتایج هر دو روش با یکدیگر مقایسه شده است.

کلمات کلیدی: *مشعل پلاسمای جفت شدهٔ القائی – ICPT – EF – ST - MDBC*

مقدمه :

مدلسازی ابزاری دقیق برای بررسی رفتار فیزیکی و شیمیایی یک مشعل پلاسمای جفت شدهٔ القائی (ICPT) فراهم می آورد. روش های یک بعدی با وجود سادگی، در فرکانس های بالا منجر به نتایجی غیرواقعی شده و از پیش بینی بسیاری از ویژگی های کلیدی پلاسما که به طور تجربی مشاهده می شوند باز می مانند. اما در مدل های دو بعدی، که درک واقعی تری از مسأله فراهم می آورند، آنچه باعث دشواری محاسبات می‌شود شرایط مرزی پیچیده ایست که از اثر همزمان میدان های ناشی از سیم پیچ و میدان های القائی پلاسما، ایجاد می شود[۱]. روش استاندارد (ST) که در آن از فرمولبندی پتانسیل برداری بر پایه شرط مرزی رابطهٔ انتگرالی بیوساوار استفاده می شود منجر به جفت شدگی غیرخطی مقادیر مرزی پتانسیل برداری و چگالی جریان القائی می شود. بنابراین برای حل معادلات الکترومغناطیس باید از روش های تکرار، که همگرائی کندی دارند استفاده نمود. اما با تعریف محدودهٔ جدیدی برای مرز، می توان شرایط مرزی و در نتیجه حل مسأله را ساده تر نمود [۲ و۳]. در این مقاله به دو روش میدان گسترده (EF) و شرط مرزی دوقطبی مغناطیسی (MDBC) که بر این اساس کار می کنند پرداخته و نتایج به دست آمده در نرم افزار FlexPDE5 برای هر دو روش با یکدیگر مقایسه می شود.

روش کار

فرضیات مسأله

فرضیات مسأله به قرار زیر می باشند:

- مشعل حول محور خود کاملا متقارن در نظر گرفته می شود.
- جریان سیم پیچ و میدان های الکترومغناطیسی القاء شده، سینوسی و سیم پیچ آرایه‌ای از حلقه های دایروی در نظر گرفته می شود، لذا میدان الکتریکی، جریان الکتریکی و پتانسیل برداری تنها دارای مؤلفه سمتی بوده و میدان مغناطیسی دارای دو مولفهٔ محوری و شعاعی می باشد.
- به دلیل کوچک بودن ابعاد سیستم (چند سانتی متر) در مقایسه با طول موج امواج الکترومغناطیسیِ سیستم (در حدود ۳۰ متر)، می توان از جملهٔ جریان جابجایی در مقایسه با جریان حقیقی صرف نظر نمود.
- جریان سیال لمینار در نظر گرفته می شود.
- فرض می شود ضخامت نوری پلاسما کم باشد به گونه ای که تابش های الکترومغناطیسی پیش از آنکه بتوانند به عنوان چشمه گرمایی برای پلاسما نقش داشته باشند از آن خارج می شوند. همچنین سیستم در حالت تعادل در نظر گرفته می شود.

فرمولبندی الکترومغناطیسی

معادلات الکترومغناطیسی مسأله از معادلات ماکسول نتیجه می شوند. با اعمال پیمانه کولن، و استفاده از قانون اهم، قانون آمپر بر حسب پتانسیل برداری $\mathbf{A}$ به شکل زیر بازنویسی می شود:

$$\nabla^2\mathbf{A} - \mu_0\sigma\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\mu_0\mathbf{J}_c \qquad (۱)$$

که $\mathbf{J}_c$ چگالی جریان سیم پیچ، σ رسانایی الکتریکی پلاسما و μ_0 تراوایی مغناطیسی خلاء می باشد. با سینوسی در نظر گرفتن جریان ها و پتانسیل برداری، و با توجه به این که هر دوی این کمیت ها تنها مؤلفهٔ سمتی دارند دو معادلهٔ زیر برای قسمت حقیقی و موهومی پتانسیل برداری از رابطهٔ (۱) نتیجه می شود:

$$\frac{\partial^2 A_R}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A_R}{\partial r}\right) - \frac{A_R}{r^2} + \mu_o\sigma\omega A_I = -\mu_0 J_c \qquad (۲)$$

$$\frac{\partial^2 A_I}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A_I}{\partial r}\right) - \frac{A_I}{r^2} - \mu_o\sigma\omega A_R = 0 \qquad (۳)$$

که ω فرکانس موج الکترومغناطیس می باشد. به این ترتیب مسأله تبدیل می شود به حل این دو معادله با شرایط مرزی مناسب. با به دست آمدن پتانسیل برداری، میدان های الکتریکی و مغناطیسی از روابط زیر قابل محاسبه خواهند بود:

$$\boldsymbol{E} = -i\omega\boldsymbol{A} \qquad \mu_0\boldsymbol{H} = \nabla \times \boldsymbol{A} \qquad (٤)$$

شرایط مرزی

به دلیل تقارن محوری مسأله، پتانسیل برداری روی محور مشعل صفر است و روی مرز به صورت حاصلجمع پتانسیل برداریِ ناشی از حلقه های جریان سیم پیچ و پتانسیل برداری جریان های القائی درون پلاسما و سیم پیچ می باشد. که از روابط (۲) و (۳) روی هر نقطه از مرز به صورت زیر محاسبه می شود:

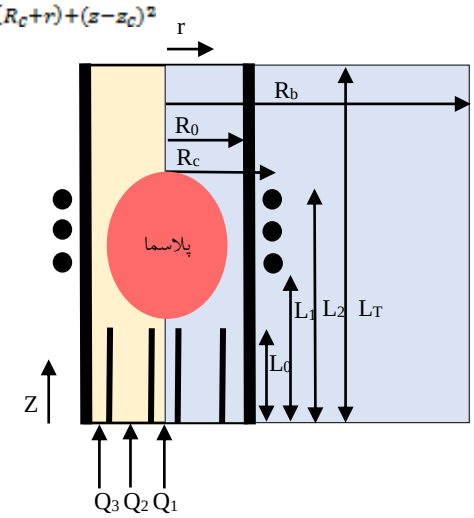
$$A_R(R_b,A_b)=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\sqrt{\frac{R_c}{R_b}}\sum_{i=1}^{coil}G(k_i)+\frac{\mu_0\omega}{2\pi}\sum_{i=1}^{C.v.}\sqrt{\frac{r_i}{R_b}}\sigma_i A_{I,i}S_i G(k_i) \qquad (۵)$$

$$A_I(R_b,A_b)=-\frac{\mu_0\omega}{2\pi}\sum_{i=1}^{C.v.}\sqrt{\frac{r_i}{R_b}}\sigma_i A_{R,i}S_i G(k_i) \qquad (۶)$$

همان طور که دیده می شود سهم جریان های سیم پیچ در جملهٔ اول و سهم جریان های القاء شده درون پلاسما در جملهٔ دومِ بخش حقیقی پتانسیل برداری ظاهر می شود. در این روابط R_c و z_c به ترتیب r و z حلقه های سیم پیچ و S_i سطح مقطع مربوط به المان جریان i ام است. و پارامتر G نیز بر حسب انتگرال های بیضوی کامل K و E به صورت زیر می باشد:

$$G(k)=\frac{(2-k^2)K(k)-2E(k)}{k} \qquad (۷)$$

$$k^2=\frac{4R_c r}{(R_c+r)+(z-z_c)^2} \qquad (۸)$$



شکل شماره (۱): مشعل پلاسمای جفت شدهٔ القائی. مستطیل زردرنگ محدودهٔ محسباتی روش ST و مستطیل آبی رنگ مربوط به دو روش EF و MDBC می باشد.

روش های حل

- *روش استاندارد (ST)*

در این روش که محدودهٔ محاسباتی برای میدان های الکترومغناطیسی تنها محدود به داخل مشعل می شود، شرط مرزی مسأله نیز از روابط (۵) و (٦) محاسبه می شود و همان طور که گفته شد پتانسیل برداری روی مرز(دیواره و دهانهٔ ورودی و خروجی مشعل)، پتانسیل برداری ناشی از حلقه های جریان سیم پیچ و جریان القائی درون پلاسما و سیم پیچ در نظر گرفته می شود. به این صورت برای حل مسأله باید از یک روش تکرار بهره جست و مسأله تنها در صورتی به جواب خواهد رسید که شرط همگرایی برآورده شود[۱].

- *روش میدان گسترده (EF)*

در این روش شرط مرزی با افزایش دادن محدودهٔ محاسباتی به خارج از محدودهٔ مشعل، ساده می شود. بدین ترتیب که مرز تا جایی گسترش می یابد که بتوان میدان ها و پتانسیل مغناطیسی را روی آن صفر در نظر گرفت:

$$A|_{boundary} = 0 \qquad (۹)$$

اگرچه محاسبات به دلیل افزایش محدوده محاسباتی کمی افزایش می یابد اما سادگی آن باعث برتری این روش به روش ST ، که همگرایی کند مسأله دست یابی به جواب را تحت الشعاع قرار می دهد، می‌شود.

- *روش شرط مرزی دوقطبی مغناطیسی (MDBC)*

در این روش نیز محدودهٔ محاسباتی به خارج از ناحیهٔ تخلیهٔ پلاسمایی گسترش می یابد و شرط مرزی روی مرز دورتری تعریف می شود. به این صورت که حاصل جمع جریانهای مشعل تحت عنوان یک جریان واحد در نظر گرفته شده و از پتانسیل برداریِ یک دوقطبی مغناطیسیِ هم جهت با محور مشعل، به عنوان مقدار پتانسیل برداری روی مرز استفاده می شود:

$$A = c\frac{r}{(r^2+z^2)^{\frac{s}{2}}} \qquad (۱۰)$$

c ثابتی است که برای مومنتوم دوقطبی محاسبه می شود و مقدار آن اگرچه وابسته به جریان های القائی بوده و نامشخص است اما از آنجا که مشتق پتانسیل برداری در رابطهٔ شرط مرزی وارد محاسبات می شود مقدار آن مورد نیاز نمی باشد. با مشتق گرفتن از رابطهٔ (۱۰) نسبت به r داریم:

$$\frac{\partial A}{\partial r} = \frac{[1-3r^2(r^2+z^2)^{-1}]}{r}A \qquad (۱۱)$$

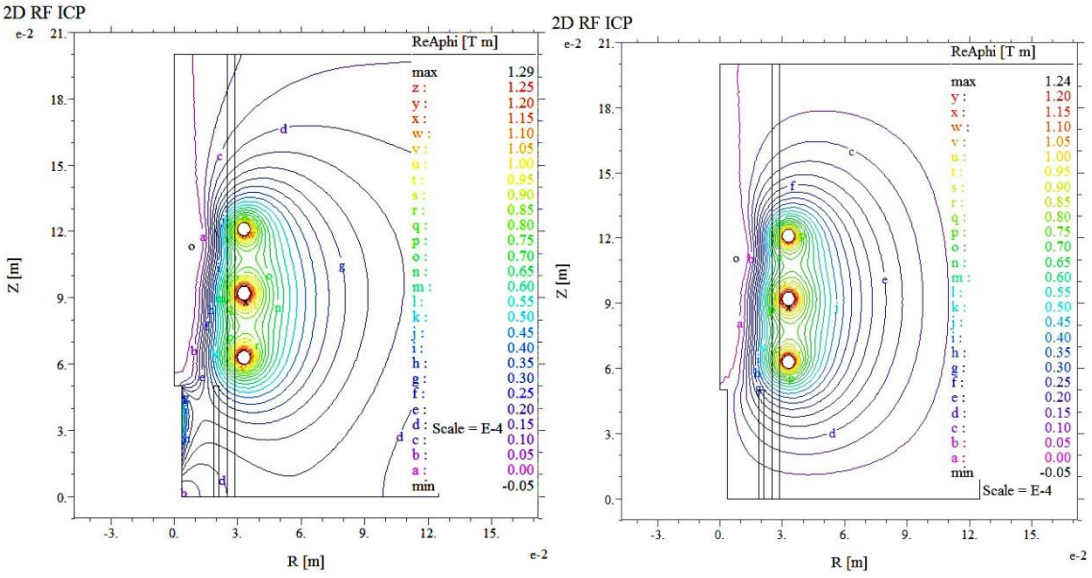
این رابطه، شرط مرزی روی مرز $r = R_b$ را بدست می دهد. به طریق مشابه با مشتق گیری نسبت به z شرط مرزی روی دو دهانه مشعل (L_T) نیز بدست می آید:

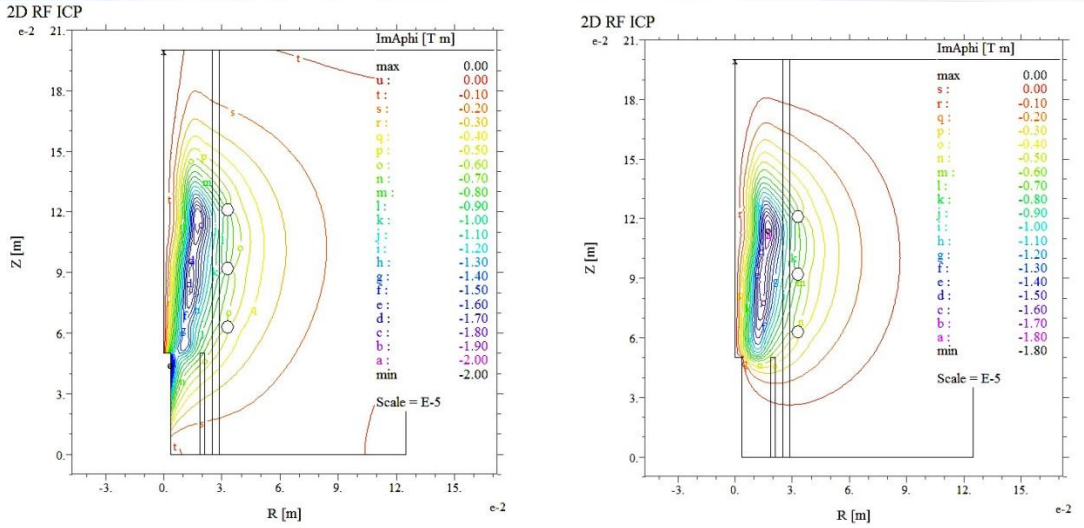
$$\frac{\partial A}{\partial z} = -\frac{3z}{r^2+z^2}A \qquad (۱۲)$$

مزیت این روش به روش ST، مانند روش EF، شرط مرزی ساده تر آن و عدم نیاز به انجام تکرار و رسیدن به شرط همگرایی، و نسبت به روش EF دقت بیشتر آن است، چراکه در واقع مقدار پتانسیل برداری روی مرز هر چقدر هم دور کاملاً صفر نخواهد بود. مقایسه نتایج به دست آمده از این روش با نتایج به دست آمده از روش ST نیز همخوانی پروفایل های به دست آمده از هر دو روش را به خوبی نشان می‌دهد [٤].

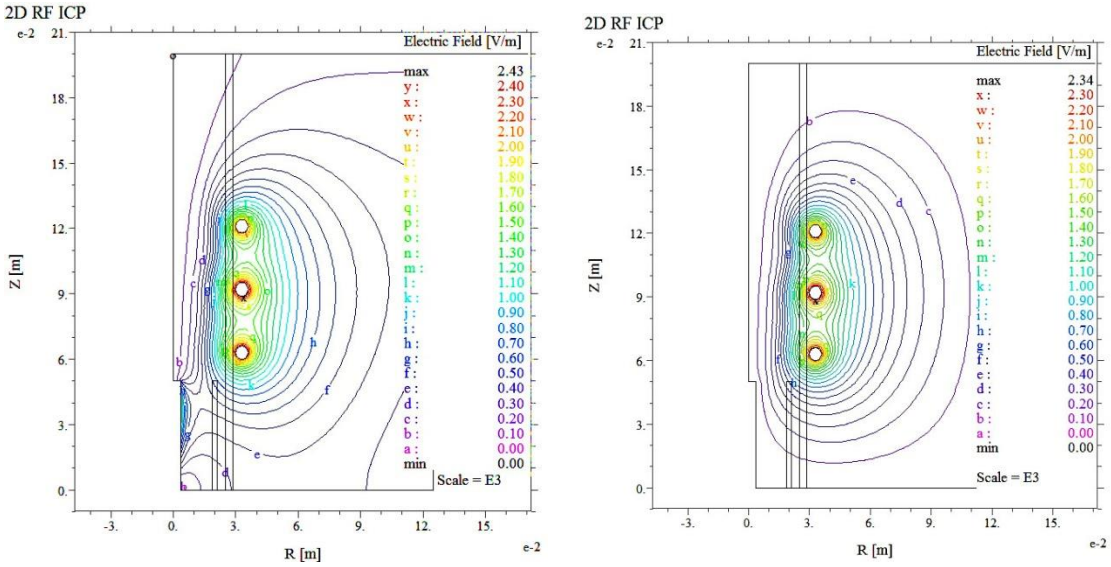
نتایج:

شکل (۲) پروفایل های به دست آمده در نرم افزار FlexPDE5 برای قسمت حقیقی و موهومی پتانسیل برداریِ به دست آمده از دو روش EF و MDBC، برای مشعلی به قطر ۲/۵ سانتی متر، جریان ۲۰۰ آمپر و فرکانس ۳مگاهرتز را برای نشان می دهد. شکل (۳) شدت میدان الکتریکی به دست آمده از دو روش را برای همان مشعل نشان می دهد. همان طور که دیده می شود در روش خطوط میدان همچنان در فواصل دورتر از مشعل ادامه داشته در حالی که در روش EF خطوط قطع شده و شدت میدان ها صفر می شوند.





شکل شماره(۲) : پروفایل های بدست آمده برای قسمت حقیقی (شکل های بالا)و موهومی (شکل های پایین)پتانسیل برداری. سمت راست: روش میدان گسترده (EF) ، سمت چپ: روش شرط مرزی دوقطبی (MDBC)



شکل شماره(۳) : پروفایل های بدست آمده برای شدت میدان الکتریکی. سمت راست : روش میدان گسترده (EF)، سمت چپ: روش شرط مرزی دوقطبی (MDBC)

بحث ونتیجه گیری :

از آنجا که میدان های الکترومغناطیس ICPT از اثر همزمان جریان های سیم پیچ و جریان های القـائی ناشـی می شوند شرایط مرزی خود تابعی از جواب های مسأله بوده و حل معادلات نیازمند روش تکـرار اسـت کـه

غالباً همگرایی پایینی دارد. با تعریف مرز به خارج از محدودهٔ مشعل می توان شرایط مرزی ساده تری برای مسأله تعریف نمود. در روش EF، مرز در بی نهایت در نظر گرفته می‌شود و در روش MDBC مرز تا جایی دور در نظر گرفته می‌شود که بتوان کل سیستم را یک دوقطبی مغناطیسی درنظرگرفت. هر دو روش در عین سادگی، به شرط این که مرز به اندازه کافی دور در نظر گرفته شود، نتایج قابل قبولی به دست می دهند. اما از آنجا که افزایش محدوده به معنای افزایش حجم محاسبات می باشد روش شرط مرزی دوقطبی بر روش میدان دور ارجحیت دارد چرا که به ازاء گستره محاسباتی کوچکتر، جواب های واقعی تری به دست می‌دهد.

مراجع :

1. J. Mostaghimi, M.I. Boulos, Plasma Chem. Plasma Process. 9, 25 (1989)
2. S. Xue, P. Proulx, M.I. Boulos, Plasma Chem. Plasma Process. 23, 245 (2003)
3. V. Colombo, C. Panciatichi, A. Zazo, G. Cocito, L. Cognolato, IEEE Trans. Plasma Sci. 25, 1073 (1997)
4. D. Bernardi, V. Colombo, E.Ghedini and Mentrelli, Eur. Phys. J. D 27, 55–72 (2003)