

مطالعه روش گسسته سازی مستقیم در حل معادله ترابرد نوترون در هندسه دو بعدی

مرتضی قرنی تمای*^(۱) - ناصر وثوقی^(۲)

دانشگاه صنعتی شریف، دانشکده مهندسی انرژی، گروه مهندسی هسته‌ای

چکیده:

در این پژوهش، روش گسسته‌سازی مستقیم (DDM^۱) در حل معادله ترابرد نوترون در هندسه‌ی دو بعدی مورد مطالعه قرار گرفته است. در پژوهش انجام گرفته معادله ترابرد یک گروهی در حالت پایا با روش DDM در فضای گسسته بازنویسی شد که این امر موجب دور ماندن از معادلات دیفرانسیلی و از بین رفتن نیاز به تقریب‌هایی برای ساده‌سازی معادله شده است. معادله بدست آمده با نام TDDM در قالب یک نرم افزار و با زبان برنامه نویسی سی-شارپ ارائه شده است. در انتها نرم افزار در حل چند مسئله نمونه مورد استفاده قرار گرفت که نتایج بدست آمده از آن، کارایی خوب آن را نشان می‌دهد.

کلمات کلیدی: روش گسسته‌سازی مستقیم، شبکه‌بندی اولیه، شبکه‌بندی ثانویه، میاناب

مقدمه:

در روش گسسته‌سازی مستقیم، دو نوع شبکه‌بندی با نام‌های شبکه‌بندی اولیه و ثانویه وجود دارد. در این روش بسته به چگونگی حضور متغیرهای فیزیکی در معادلات، آن‌ها را با نام‌های حالت، چشمه و انرژی دسته‌بندی می‌کنیم و بر اساس ماهیت متغیرها با نام‌های عام و میدان تقسیم‌بندی می‌شوند. و نیز برای تمامی المان‌های فضایی، دو جهت داخلی و خارجی تعریف می‌شود. بر این اساس دو اصل مهم در این روش وجود دارد.

اصل اول به این صورت بیان می‌شود که متغیرهای حالت به المان‌های فضایی با جهت‌گیری داخلی و متغیرهای چشمه و انرژی به المان‌های فضایی با جهت‌گیری خارجی وابسته‌اند و بر اساس اصل دوم متغیرهای حالت در شبکه‌بندی اولیه و متغیرهای چشمه و انرژی در شبکه‌بندی ثانویه مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرند [۱].

این روش برای اولین بار در حل معادلات میدانی [۱] مورد مطالعه قرار گرفت و در زمینه نوترونیک نیز از این روش در حل معادله پخش نوترون [۲] بهره برده شده است. بر اساس این تحقیقات می‌توان گفت استفاده از این روش در محاسبات نوترونی منجر به مرتبه همگرایی بالا نسبت به سایر روش‌ها می‌شود. برای مثال مطالعه این روش در حل معادله پخش نوترون مرتبه همگرایی تا درجه ۴ را در پی داشته است که این پارامتر در روش تفاضل محدود ۲ و برای روش اجزا محدود برابر ۲/۵ می‌باشد [۳]. در این پژوهش معادله ترابرد بر اساس اصول و فرمول‌بندی فیزیک گسسته، تولید و حل می‌شود.

^۱Direct Discrete Method

روش کار:

با بررسی معادله ترابرد در حالت پایا و در یک گروه انرژی؛ وابستگی به زمان و انرژی از متغیر شار نوترونی حذف می‌شود. ابتدا از جداسازی متغیرها، برای تفکیک وابستگی‌های شار استفاده می‌کنیم (رابطه (1)).

$$\Phi(x,y,\mu) = R(x,y)F(\mu) \quad (1)$$

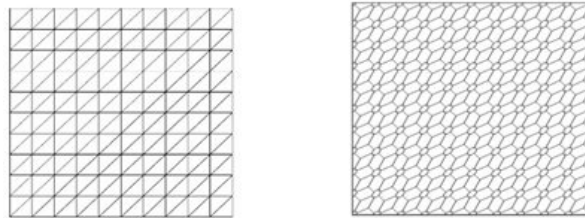
برای هر کدام از توابع حاصل شده، میانیاب‌هایی در نظر گرفته می‌شود و طبق اصول روش گسسته‌سازی مستقیم برای آنها، شبکه‌بندی اولیه و ثانویه خواهیم داشت و بنا بر اصل دوم فیزیک گسسته، مقادیر هر تابع می‌بایست در نقاط شبکه‌بندی اولیه مربوط به خود تبیین گردد.

برای قسمت مکانی شار میانیاب مرتبه دوم و برای قسمت زاویه‌ای شار میانیاب مرتبه اول انتخاب شد. لازم به ذکر است در این پژوهش برای تابع وابسته به زاویه، زاویه سمتی به دلیل تقارن در نظر گرفته نمی‌شود.

$$R(x,y) = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2 \quad (2)$$

$$F(\mu) = a_1 + a_2\mu \quad (3)$$

شبکه‌بندی اولیه بر روی مکان، شبکه مثلثی با روش دلانی و شبکه‌بندی ثانویه به روش باری-سنتریک انجام می‌گیرد [۲]. شکل (۱) بیانگر شبکه‌بندی اولیه و ثانویه مکان بر روی یک مربع می‌باشد.



شکل (۱): شبکه بندی اولیه مکان (چپ)، شبکه بندی ثانویه مکان (راست)

برای مشخص شدن تابع R به شش نقطه از شبکه‌بندی اولیه مکان نیازمندیم که این شش نقطه، رئوس اصلی مثلث و نقاط میانی اضلاع می‌باشند (نقاط $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$) [۳].

با نوشتن رابطه (۲) برای هر شش نقطه مورد نظر، رابطه (۴) حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_{p_1} & y_{p_1} & x_{p_1}^2 & x_{p_1}y_{p_1} & y_{p_1}^2 \\ 1 & x_{p_2} & y_{p_2} & x_{p_2}^2 & x_{p_2}y_{p_2} & y_{p_2}^2 \\ 1 & x_{p_3} & y_{p_3} & x_{p_3}^2 & x_{p_3}y_{p_3} & y_{p_3}^2 \\ 1 & x_{p_4} & y_{p_4} & x_{p_4}^2 & x_{p_4}y_{p_4} & y_{p_4}^2 \\ 1 & x_{p_5} & y_{p_5} & x_{p_5}^2 & x_{p_5}y_{p_5} & y_{p_5}^2 \\ 1 & x_{p_6} & y_{p_6} & x_{p_6}^2 & x_{p_6}y_{p_6} & y_{p_6}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{p_1} \\ \Phi_{p_2} \\ \Phi_{p_3} \\ \Phi_{p_4} \\ \Phi_{p_5} \\ \Phi_{p_6} \end{bmatrix} \rightarrow U_r A_r = [\Phi_r] \quad (4)$$

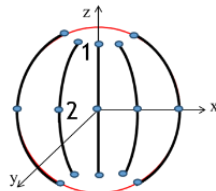
در این معادله A_r ماتریس ضرائب، U_r ماتریس مختصات و Φ_r ماتریس مجهولات هر مثلث شبکه بندی اولیه می باشد.

بر روی خطوط و سطوح شبکه بندی ثانویه، انتگرال یک بعدی $I_1[\Phi_r]$ و دوبعدی $I_2[\Phi_r]$ بر حسب رابطه (۴) تعریف می شود که در تولید جملات معادله ترابرد به روش گسسته سازی مستقیم استفاده می گردد [۳].

$$\int_l R(x,y) dl = I_1[\Phi_r] \quad (5)$$

$$\iint_s R(x,y) dx dy = I_2[\Phi_r] \quad (6)$$

شبکه بندی اولیه بر روی زاویه، با تقسیم بندی زاویه قطبی و سمتی انجام می گیرد و تعداد زاویه های فضایی وابسته به پارامتر O_N (شامل مقادیر ۲ و ۴ و ۶ و ...) می باشد. در این شبکه بندی μ (بازه $(-1,1)$) به $N+2$ قسمت مساوی و ϕ (بازه $[0,2\pi]$) به $4N$ قسمت مساوی تقسیم می شود و نقاط شبکه بندی ثانویه مابین نقاط شبکه بندی اولیه قرار می گیرند (شکل (۲)).



شکل (۲): شبکه بندی اولیه بر روی زاویه فضایی

$$\begin{bmatrix} \Phi_{\Omega 1} \\ \Phi_{\Omega 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mu_1 \\ 1 & \mu_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \rightarrow [\Phi_{\Omega}] = U_{\Omega} A_{\Omega} \quad (7)$$

در رابطه (۷)، A_{Ω} ماتریس ضرائب، U_{Ω} ماتریس مختصات و Φ_{Ω} ماتریس مجهولات شبکه بندی اولیه زاویه می باشد. برای قسمت زاویه ای نیز عملگرهایی بر حسب نقاط شبکه بندی اولیه و ثانویه و همچنین رابطه (۷) تعریف می شود که با نمادهای معرفی شده در جدول (۱) در معادله بکار می روند.

جدول (۱): عملگرهای مورد نیاز در تابع وابسته به زاویه

$\int \Omega_x F(\Omega) d\Omega = I_{x\Omega}[\Phi_{\Omega}]$	$\int \Omega_y F(\Omega) d\Omega = I_{y\Omega}[\Phi_{\Omega}]$	$\int F(\Omega) d\Omega = I_{\Omega}[\Phi_{\Omega}]$
--	--	--

بعد از فراهم شدن تمام مقدمات و ابزارهای لازم برای روش گسسته سازی مستقیم، شرایط برای تولید جملات معادله ترابرد مهیا می شود. در ادامه، جملات مربوط به معادله ترابرد در فضای گسسته با توجه به عملگرهای تعریف شده ذکر شده است.

L_m -geometry جمله فرار هندسی، L_m -reaction جمله از بین رفتن نوترون از طریق برهم کنش، P_m -exsource جمله تولید چشمه خارجی، P_m -fission جمله تولید از طریق شکافت و P_m -scattering جمله تولید از راه پراکندگی در زاویه m می باشند.

$$L_{\text{geometry}} = \int_1 \vec{\Omega} \cdot \int \vec{\Omega} R(r) F(\Omega) d\Omega \rightarrow$$

$$L_{m\text{-geometry}} = \sum_{i=1}^{n_1} n_{xi} I_{1i}[\Phi_r] \sum_{j=1}^{n_2} I_{\Omega_{xj}}[\Phi_{\Omega}]_j + \sum_{i=1}^{n_1} n_{yi} I_{1i}[\Phi_r] \sum_{j=1}^{n_2} I_{\Omega_{yj}}[\Phi_{\Omega}]_j \quad (8)$$

$$L_{\text{reaction}} = \int_s \Sigma_t R(r) da \int_{\Omega} F(\Omega) d\Omega \rightarrow L_{m\text{-reaction}} = \Sigma_t \sum_{i=1}^{n_1} I_{2i}[\Phi_r] \sum_{j=1}^{n_2} I_{\Omega_j}[\Phi_{\Omega}]_j \quad (9)$$

$$P_{\text{exsource}} = \int_a \int_{\Omega} S_{\text{ext}}(r, \Omega) da d\Omega \rightarrow P_{m\text{-exsource}} = S_0 S_r S_{\Omega} \quad (10)$$

در این جمله S_0 قدرت چشمه، S_r سطح شبکه ثانویه مکان و S_{Ω} مساحت شبکه ثانویه زاویه مورد بررسی است.

$$P_{\text{fission}} = \frac{1}{4\pi} \int da \int d\Omega \int_{4\pi} d\Omega' v \Sigma_f R(r) F(\Omega') \rightarrow P_{m\text{-fission}} = \frac{\Delta\Omega_m}{4\pi K} v \Sigma_f \sum_{i=1}^{n_1} I_{2i}[\Phi]_i \sum_{m'=1}^M \sum_{j=1}^{n_2} I_{\Omega_{m'j}}[\Phi_{\Omega_{m'}}]_j \quad (11)$$

$$P_{\text{scattering}} = \int_a da \int_{\Omega} d\Omega \int_{4\pi} d\Omega' \Sigma_s(\Omega' \rightarrow \Omega) R(r) F(\Omega') \rightarrow P_{m\text{-scattering}} = \frac{\Delta\Omega_m}{4\pi} \sum_{i=1}^{n_1} I_{2i}[\Phi]_i \sum_{m'=1}^M [\Sigma_{s0} + 3\Sigma_{s1} \Omega_m \cdot \Omega_{m'}] \sum_{j=1}^{n_2} I_{\Omega_{m'j}}[\Phi_{\Omega_{m'}}]_j \quad (12)$$

به این نکته نیز باید اشاره کرد که در تمامی جملات، n_1 و n_2 به ترتیب تعداد شبکه‌های اولیه مشترک در تشکیل شبکه‌های ثانویه مکان و زاویه مورد بررسی می‌باشد. در روابط بالا اندیس m مربوط به زاویه مورد بررسی بوده و $\frac{\Delta\Omega_m}{4\pi}$ وزن آن زاویه می‌باشد. در نهایت شکل گسسته معادله ترابرد در رابطه (۱۳) نشان داده شده است. این معادله برای تمام نقاط شبکه بندی اولیه مکان در تمام جهات (نقاط شبکه بندی اولیه زاویه) نوشته می‌شود.

$$L_{m\text{-geometry}} + L_{m\text{-reaction}} = P_{m\text{-fission}} + P_{m\text{-scattering}} + P_{m\text{-exsource}} \quad (13)$$

نتایج

مسئله اول تیغه یک بعدی مشهور ISSA می‌باشد. مرز سمت چپ تیغه بازتابنده و مرز سمت راست آن سطح آزاد می‌باشد [۴]. نتایج حاصل از نرم‌افزار FELTRAN در این مسئله به عنوان مرجع معرفی شده است. شکل (۳) و جدول (۲) به ترتیب هندسه تیغه و مشخصات نوترونی مواد آن را نمایش می‌دهند.

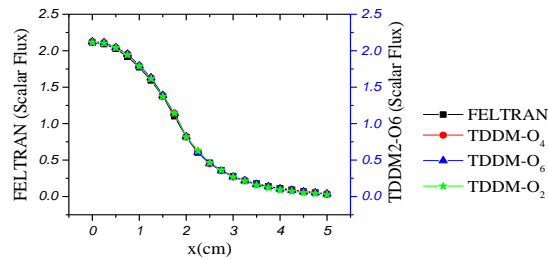


شکل (۳): تیغه یک بعدی ISSA با ابعاد بر حسب سانتی متر [۴]

جدول (۲): مشخصات مواد تشکیل دهنده تیغه یک بعدی ISSA [۴]

سطح مقطع	Σ_i (cm ⁻¹)	$v\Sigma_i$ (cm ⁻¹)	Σ_s (cm ⁻¹)
ناحیه ۱	۱	۱	۰/۵
ناحیه ۲	۰/۸	۰	۰/۴

توزیع شار در TDDM به ازای تقسیم بندی های O_2 ، O_4 و O_6 ، با نمودار مرجع در شکل (۴) ترسیم شده‌اند. لازم به ذکر است نرم افزار FELTRAN معادله ترابرد را به روش تقریب P_L حل می نماید.



شکل (۴): توزیع شار در تیغه یک بعدی ISSA

در جدول (۳) درصد خطای نسبی متوسط شار حاصل نسبت به نرم افزار FELTRAN با توجه به فرمول (۱۴) محاسبه شده است (E_i خطای نسبی نقطه i). در جدول (۴) نیز مقادیر ضریب تکثیر محیط آورده شده است.

$$\text{خطای نسبی متوسط} = \sum_{i=1}^N \frac{E_i}{N} \quad (14)$$

جدول (۳): مقادیر درصد خطای نسبی متوسط روش TDDM نسبت به FELTRAN

روش	درصد خطای نسبی متوسط		
	O ₂	O ₄	O ₆
TDDM2	۷/۱۷	۳/۸۲	۳/۸۳

جدول (۴): مقادیر ضریب تکثیر تیغه یک بعدی ISSA[4]

روش	ضریب تکثیر			خطای ضریب تکثیر %
	O ₂	O ₄	O ₆	
TDDM	۱/۶۷۹۵	۱/۶۷۸۵	۱/۶۷۸۳	۰/۰۲۷
ANISN	S ₂ ۱/۶۷۷۲	-	S ₁₆ ۱/۶۷۸۴	۰/۰۲۱
FELTRAN	P ₁ ۱/۶۴۵۱	P ₃ ۱/۶۷۵۱	P ₅ ۱/۶۷۷۱	۰/۰۹۸
MCNP	۱/۶۷۸۷۶ ± ۰/۰۰۰۳۶			

مسئله دوم مربعی به ضلع ۲ سانتی متر می باشد که از یک ماده یکنواخت تشکیل شده است. شرایط مرزی این مسئله سطح آزاد می باشد و اطلاعات مربوط به سطح مقطع این ماده در جدول (۵) ذکر شده است [۵].

جدول (۵): مشخصات مواد تشکیل دهنده راکتور دوبعدی همگن [۵]

سطح مقطع	Σ_t (cm ⁻¹)	$\nu\Sigma_f$ (cm ⁻¹)	Σ_s (cm ⁻¹)
کل نواحی	۱	۰/۲۵	۰/۹

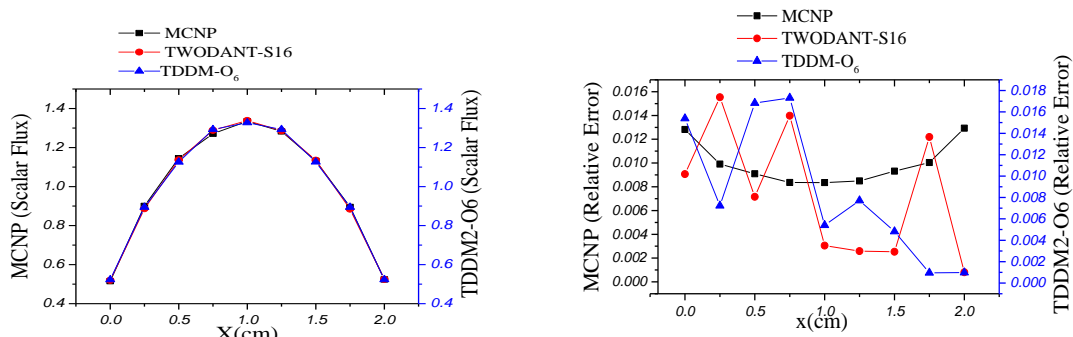
در این مسئله کد MCNP به عنوان مرجع در نظر گرفته می شود. نرم افزار TWODANT معادله ترابرد را به روش SN و اجزا محدود حل می کند. در جدول (۶) ضریب تکثیر بدست آمده از نرم افزارهای مختلف ذکر شده است.

جدول (۶): ضریب تکثیر محاسبه شده برای راکتور دوبعدی همگن [۵]

روش	مقادیر ضریب تکثیر						خطای ضریب تکثیر %
	O ₂	O ₄	O ₆				
TDDM	۰/۳۹۷۰۴	۰/۳۹۰۱۲	۰/۳۸۹۹۵				۰/۱۰۲
PL	P ₁ ۰/۳۳۲۷	P ₃ ۰/۳۸۳۰	P ₅ ۰/۳۸۷۶	P ₇ ۰/۳۸۸۶	P ₉ ۰/۳۸۹۰	P ₁₁ ۰/۳۸۹۱۹	۰/۹۲

MCNP	۰/۳۸۹۵۵۷۰/۰۰۰۱۴	-
------	-----------------	---

توزیع شار حاصل از سه روش بر روی خط $y=1\text{cm}$ و هم چنین خطای نسبی آنها نسبت به MCNP در شکل (۵) رسم شده‌اند.



شکل (۵): نمودار توزیع شار (راست) و خطای نسبی توزیع شار (چپ) در راستای خط $y=1\text{cm}$

بحث و نتیجه‌گیری:

یکی از مزیت‌های روش گسسته‌سازی مستقیم نسبت به سایر روش‌ها، وجود شبکه‌بندی ثانویه و اعمال تغییر در آن برای بهبود نتایج می‌باشد، به طوری که شبکه‌بندی اولیه ثابت فرض شود. درحالی‌که در روش‌های دیگر فقط یک نوع شبکه‌بندی وجود دارد و برای بهبود نتایج باید آن شبکه‌بندی را تغییر داد. در روش S_N انتخاب زوایا و وزن آن‌ها کار بسیار دشواری است و تعداد زوایا محدود می‌باشد. درحالی‌که در روش TDDM با گسسته‌سازی مستقیم زاویه، هر نقطه از شبکه‌بندی اولیه بیانگر یک زاویه و سطح شبکه‌بندی ثانویه محیط بر هر زاویه، تقسیم بر 4π وزن آن را مشخص می‌کند و بسته به نظر کاربر تعداد زوایا می‌تواند افزایش پیدا کند. این موضوع برتری روش TDDM را نسبت به روش S_N نشان می‌دهد. معایب اصلی روش P_L پیچیده بودن معادلات حاصل از تقریب‌های بالا و دشوار بودن برنامه نویسی این معادلات است درحالی‌که در روش TDDM به دلیل تولید معادله در فضای گسسته، کار برنامه نویسی آن به سادگی صورت می‌گیرد و هم چنین نتایج خوب بدست آمده از آن بیانگر برتری روش TDDM نسبت به روش P_L است.

مراجع:

1. Tonti, E., *A direct discrete formulation of field laws: The cell method*. CMES- Computer Modeling in Engineering and Sciences, 2001. **2**(2): p. 237-258.
2. Vosoughi, N., A.A. Salehi, and M. Shahriari, *Discrete formulation for two-dimensional multigroup neutron diffusion equations*. Annals of Nuclear Energy, 2004. **31**(3): p. 231-253.

3. Ayyoubzadeh, S.M., N. Vosoughi, and S.M. Ayyoubzadeh, *On an improved Direct Discrete Method and its application in two dimensional multi-group neutron diffusion equation*. Annals of Nuclear Energy, 2012. **44**: p. 1-7.
4. Issa, J., et al., *Multigroup application of the anisotropic FEM code FELTRAN to one, two, three-dimensions and R-Z problems*. Progress in Nuclear Energy, 1986. **18**(1): p. 251-264.
5. Capilla, M., et al., *Application of a nodal collocation approximation for the multidimensional PL equations to the 3D Takeda benchmark problems*. Annals of Nuclear Energy, 2012. **40**(1): p. 1-13.