

## مقایسه پارامترهای نوترونیک کدهای محاسباتی یک بعدی به روش المان محدود، مربعات تعمیم یافته و مونت کارلو و صحت سنجی با حل تحلیلی

حداد، کمال<sup>(۱)</sup> - رفیعی، میثم<sup>(۱)</sup> - سلماسیان، بهزاد<sup>(۱)</sup>\*

(۱) دانشگاه شیراز، دانشکده مهندسی مکانیک، گروه مهندسی هسته‌ای

### چکیده

تخمین پارامترهای نوترونیک راکتور مانند ضریب تکثیر، شار و توزیع توان، به منظور دید مناسب از شرایط کاری قلب از اهمیت شایانی برخوردار می‌باشد. در پژوهش اخیر پارامترهای نوترونیک در هندسه دو گروهی با دو گروه انرژی با استفاده از کد محاسباتی یک بعدی به روش المان محدود مربعات تعمیم یافته (GELES) و مونت کارلو (MC3) محاسبه و مقایسه شده‌اند و صحت سنجی نتایج دو کد با حل تحلیلی انجام شده است. بیشینه خطای روش کد GELES و کد MC3 آنالوگ و قطعی نسبت به نتایج حل تحلیلی قطعی در محاسبه ضریب تکثیر به ترتیب  $1.5E-01$ ٪،  $1.5E-01$ ٪ و  $8.0E-02$ ٪ بوده و نتایج محاسبه توزیع شار نوترونی و سطح توان تطابق مناسب میان روش‌ها دارد. کلمات کلیدی: پارامترهای نوترونیک، کد محاسبات نوترونیک MC3 و GELES.

### مقدمه

معادله‌ی ترابرد نوترون، توصیف‌کننده‌ی رفتار متوسط تعداد زیاد نوترون در یک سیستم می‌باشد، که با استفاده از روش‌های یقینی همراه با در نظر گرفتن ساده‌سازی‌هایی روی هندسه سامانه و گسسته‌سازی فضای فاز قابل حل می‌باشد. برای اولین بار آکروید روش‌های المان محدود را برای حل معادلات پخش و ترابرد نوترون مورد استفاده قرار داد [۱، ۲، ۳]. در این روش‌ها با استفاده از حل معادله پخش با استفاده از اصل وردشی و المان محدود مربعات تعمیم یافته شار تخمینی و سایر کمیت‌ها محاسبه می‌گردند اما در روش شبیه‌سازی مونت کارلو، معادله‌ی حاکم بر رفتار متوسط نوترون یا همان معادله‌ی ترابرد حل نمی‌گردد بلکه با توجه به فیزیک حاکم بر ترابرد نوترون، رفتار جمعیت نمونه‌ای از نوترون‌ها در سامانه شبیه‌سازی شده و با استفاده از مفاهیم و برآوردکننده‌های آماری، کمیت‌های مورد نظر در سیستم، محاسبه می‌شوند [۴]. پژوهش‌های متعددی در محاسبات خود از کد مونت کارلو بهره برده‌اند صحت سنجی‌های متعددی نیز انجام شده است [۵].

مواد و روش کار

کد محاسبات نوترونیک MC3:

این برنامه برای انجام محاسبات بحرانیات در مسائلی با سطح مقاطع گروهی ناهمسانگرد و هندسه‌ی یک بعدی قابل استفاده می‌باشد. در این کد از روش تکرار قدرت برای شبیه‌سازی محاسبات بحرانیات استفاده شده است. در این روش محاسبات به صورت نسل به نسل انجام می‌شود.

نسل‌هایی که در آن‌ها توزیع جمعیت نوترونی به حالت پایه نرسیده است نسل‌های غیرفعال نامیده شده و در نتایج متوسط نهایی به حساب نمی‌آیند. نسل‌های فعال به نسل‌هایی گفته می‌شود که در آن‌ها توزیع جمعیت نوترونی به حالت پایه رسیده است و نتایج نهایی با متوسط‌گیری از نتایج این نسل‌ها بدست می‌آیند. در این برنامه شبیه‌سازی اندرکنش جذب به دو روش جذب صریح و ضمنی امکان پذیر می‌باشد.

در شبیه‌سازی جذب به صورت صریح، فیزیک واقعی جذب شبیه‌سازی می‌شود و در صورت وقوع اندرکنش جذب، نوترون نابود می‌شود. در این روش نوع اندرکنش (جذب یا پراکندگی) نوترون با توجه به تابع توزیع احتمال گسسته بدست آمده از سطح مقطع جذب و پراکندگی کل شبیه‌سازی می‌گردد.

در شبیه‌سازی جذب به صورت ضمنی، در نقطه برخورد وزن نوترون کاهش یافته و نوترون پراکنده می‌شود. به عبارت دیگر در این روش برای تعیین نوع اندرکنش نمونه‌برداری صورت نمی‌پذیرد بلکه نوترون قطعاً با وزنی کاهش یافته پراکنده می‌شود.

در شبیه‌سازی ترابرد نوترون ضمن پیگیری حرکات تصادفی نوترون‌ها در درون سیستم، باید اطلاعات مورد نظرمان را از شبیه‌سازی استخراج کنیم.

به نسل‌های اولیه‌ای که قبل از رسیدن سامانه به مد پایه شبیه‌سازی می‌شوند اصطلاحاً نسل‌های غیر فعال و به نسل‌های بعد از آن اصطلاحاً نسل‌های فعال می‌گویند. از نسل‌های غیر فعال برای برآورد نهایی ضریب تکثیر و دیگر کمیت‌ها استفاده نمی‌شود.

در هر نسل سه برآوردکننده‌ی برخورد، جذب و طول پیمایش به همراه میانگین ساده آن‌ها محاسبه می‌شوند. میانگین ساده این برآوردکننده‌ها به صورت معادله ۱ برآورد می‌شود.

معادله ۱:

$$k_i^{ave} = \frac{k_i^A + k_i^C + k_i^T}{3}$$

در روند شبیه‌سازی مونت کارلو شار متوسط سطحی با رابطه‌ی زیر مشخص می‌شود:

معادله ۲:

$$\bar{\phi}_s = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^{k_i} \frac{W_{i,k}}{A|\vec{n} \cdot \vec{\Omega}|_{i,k}}}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^{k_i} \frac{W_{i,k}}{A\mu_{i,k}}}{N} = \frac{\sum \phi_i}{N}$$

[۶]

کد محاسباتی نوترونیکی GELES:

در این کد معادلات پخش برای چند گروه انرژی و هندسه‌های یک بعدی حل می‌گردد. این کد با فرض پیوستگی شار در مرزهای داخلی، با استفاده از روش حل اصل حداقل مربعات خطا، اقدام به حل عددی معادلات پخش برای محاسبه شار مربوطه می‌کند. شرایط مرزی قابل اعمال خلا، بازتابی و آلیبدو با مقادیر متفاوت، است که در داخل معادله آزمون اصل وردشی اعمال می‌شود. این کد قابلیت حل معادلات دارای چشمه نوترونی و **up-scattering** را بدون محدودیت دارا است.

### معادلات مورد استفاده:

این کد از معادله پخش و معادله شرایط مرزی برای بدست آوردن توزیع شار نوترونی استفاده می‌نماید.  
معادله ۳ :

$$-D\nabla^2\varphi + \sigma_a\varphi = S$$

$$\frac{\varphi}{4} + \frac{D}{2} \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$$

بدلیل دشواری حل دقیق عددی این معادلات، اگر  $(\varphi_0, J_0)$  پاسخ دقیق و  $(\varphi, J)$  تخمین ما باشد، بر مبنای اصل بردار مربعات خطا، میزان خطا به صورت معادله ۴ حاصل می‌گردد.  
معادله ۴ :

$$H(\varphi, J) = (\varphi - \varphi_0)^2 = \{(\varphi - \varphi_0)^2, (J - J_0)^2\}$$

برای این که مقدار خطا را به حداقل برسانیم باید مقدار  $K'[\varphi]$  بی‌شی‌نه شود.  
معادله ۵ :

$$K'[\varphi] = \int_V [(2S\varphi) - (\varphi\sigma_a\varphi) - (\nabla\varphi \cdot D\nabla\varphi)] dV + \frac{1}{\alpha^2} \int_{S_b} \varphi^2 dS$$

برای حل معادله فوق با استفاده از روش المان محدود معادله ۶  
معادله ۶ :

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{N_e} \sum_{p=1}^{N_p} B_p^j(x) \psi_p^j$$

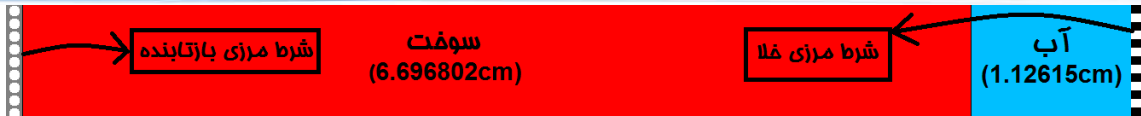
به معادله ۷ می‌رسیم.  
معادله ۷ :

$$k'[\varphi] = \sum_{j=1}^{N_e} 2L_1^j \underline{\psi}^j - \underline{\psi}^{jT} (L_2^j + L_3^j + L_4^j) \underline{\psi}^j = 2\underline{\Psi}^T B - \underline{\Psi}^T \underline{A} \underline{\Psi}$$

معادله ۷ ی فوق با استفاده از روش **power iteration** حل می‌گردد.

### مدل مورد بررسی

برای مقایسه پارامترهای نوترونیک در روش هایمان وصحت‌سنجی آن‌ها باحل تحلیلی یک هندسه دو ناحیه‌ای و دوگروهی با ابعاد بحرانی که از مرجع ۷ انتخاب شده‌است. این هندسه در شکل زیر نمایش داده شده‌است.



شکل ۱: هندسه دو ناحیه‌ای و دو گروهی با در نظر گرفتن مرز بازتابنده در سمت چپ و مرز خلا در سمت راست

در شکل ۱ سمت چپ شرط مرزی بازتابنده و سمت راست شرط مرزی خلا حاکم است. سوخت مان در سمت چپ با ضخامت مطرحی و آب بعنوان خنک‌کننده در سمت راست قرار دارد. عرض نواحی ۱۰ سانتی‌متر در نظر گرفته شده و برای هر ناحیه ۱۰۰ مش استفاده شده است.

جدول ۱: مشخصات مواد در نظر گرفته شده در دو گروه سریع و حرارتی

گروه	ماده	$D$	$\Sigma_r$	$\nu$	$\Sigma_f$	$\Sigma_a$	$\Sigma_{gg}$	$\Sigma_{gg'}$	$\chi$
۱	سوخت	0.37488	0.04829	2.5	0.000836	0.00194	0.83892	0.04635	1
	آب	0.37507	0.04823	0	0	0.00074	0.83975	0.04749	0
۲	سوخت	0.110108	0.0544	2.5	0.029564	0.053633	2.9183	0.000767	0
	آب	0.11092	0.0189	0	0	0.018564	2.9676	0.000336	0

جدول ۱ سطوح مقاطع و سایر کمیت‌های نوترونیکی مربوط به دو ماده سوخت و آب در دو گروه در جدول فوق وارد شده است.

## نتایج

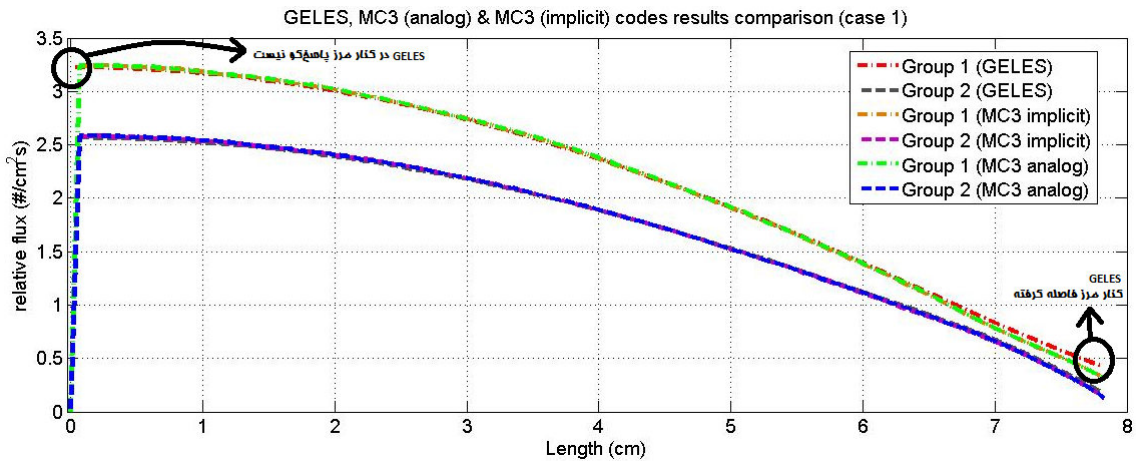
در جدول ۲ مقایسه مقدار کمیت ضریب تکثیر برای کد GELES و کد MC3 در دو حالت ضمنی و قطعی و صحت‌سنجی آن‌ها با استفاده از حل تحلیلی و مقدار خطای هر کدام از روش‌ها نسبت به روش حل تحلیلی بیان شده است.

جدول ۲: مقایسه ضریب تکثیر در کدهای GELES و MC3 و حل تحلیلی

مدل	کمیت	کد GELES	کد MC3 analog	کد MC3 implicit	حل تحلیلی
هندسه دو ناحیه‌ای و دو گروهی	ضریب تکثیر	1.0015	1.0015	1.0008	1.0000
	میزان خطا بر حسب درصد	1.5E-01	1.5E-01	8.0E-02	-----

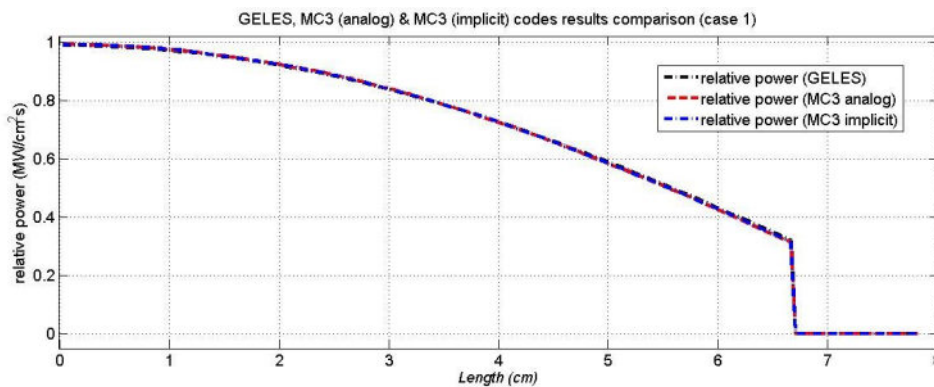
طبق جدول ۲ خطای هر کدام از روش‌ها نسبت به پاسخ حل تحلیلی قطعی بعنوان مرجع کم‌تر از ۰,۵٪ بوده و پاسخ کد MC3 با روش حل جذب ضمنی به علت هوشمندی نسبت به روش آنالوگ و حل به روش المان محدود مربعات تعمیم یافته مناسب‌تر و با خطای کم‌تر می‌باشد.

شکل ۲ مقدار شار نسبی تخمینی دو گروه را میان روش‌های حل با هم مقایسه می‌کند.



شکل ۲: مقایسه شار نسبی دو گروهی در سه روش حل

شکل ۲ مقدار شار نسبی تخمینی هر گروه را برای هر کدام از روش حل‌ها نشان می‌دهد. نتایج تطابق مناسبی را میان پاسخ شار روش‌های مختلف نمایش می‌دهد. در نقاط مرزی کد GELES بدلیل عدم پاسخ‌گویی معادله پخش در نقاط مرزی، پاسخ مناسبی نمی‌دهد ولی در سایر نقاط پاسخ‌های مناسبی دارد. نتایج هر دو روش کد MC3 بدلیل تبعیت از روش مونت کارلو با جامعه آماری مناسب، پاسخ تخمینی بسیار نزدیک به واقعی دارند.



شکل ۳: مقایسه توزیع توان نسبی در سه روش حل

شکل ۳ منحنی توزیع توان تخمینی در هندسه مورد نظر را با استفاده از سه روش مقایسه نموده است. با توجه به شکل نمودار توزیع توان در هر سه روش با هم توافق بسیار مناسبی دارند. هر چه از مرز بازتابنده سوخت به سمت انتهای سوخت و شروع خنک کننده نزدیک می‌شویم میزان انرژی تولیدی مان کم‌تر می‌شود. و با خروج از سوخت بدلیل صفر بودن  $\Sigma_f$  برابر با صفر می‌باشد.

بحث و نتیجه گیری :

در این پروژه پارامترهای نوترونیک از قبیل ضریب تکثیر، شارنسبی گروه‌ها و نواحی و همچنین توان نسبی در هندسه‌ی یک بعدی مشخص با استفاده از سه روش کد GELES، کد MC3 نوع آنالوگ و کد MC3 نوع ضمنی محاسبه شده و نمودار مربوط به آن‌ها ترسیم شده است. مقدار ضریب تکثیر در سه روش با هم تطابق مناسبی دارد. مقایسه با نتایج حل تحلیلی عددی نیز نشان می‌دهد که مقادیر دو کد با نتایج حل تحلیلی سازگاری بسیار مناسبی دارد. بیشینه خطای روش GELES،  $MC3(analog)$  و  $MC3(implicit)$  نسبت به نتایج حل تحلیلی قطعی در محاسبه ضریب تکثیر به ترتیب  $1.5E-01$ ،  $1.5E-01$  و  $8.0E-02$  بوده است. در تحلیل خروجی کد MC3 برای ضریب تکثیر در دو حالت جذب صریح و جذب ضمنی قابل بیان است که مقدار آن در حالت جذب ضمنی دارای صحت بیشتری در قیاس با حل تحلیلی است. با توجه به نمودارهای ترسیم شده برای شار و توزیع توان، تطابق بسیار خوب این پارامترها را در دو کد ملاحظه می‌گردد.

## مراجع

1. Ackroyd, R. T. "A finite element method for diffusion theory embracing nodal and difference methods." Progress in Nuclear Energy 18.1 (1986): 7-20.
2. Ackroyd, R. T. "A least squares principle unifying finite element, finite difference and nodal methods for diffusion theory." Progress in Nuclear Energy 19.2 (1987): 137-172.
3. Ackroyd, Ron T. Finite element methods for particle transport. Research Studies Press, 1997.
4. Poston, David I., and Holly R. Trelue. Users manual, version 1.00 for MonteBurns, version 3.01. No. LA-UR--98-2718. Los Alamos National Lab., NM (United States), 1998.
5. Radulović, Vladimir, et al. "Validation of absolute axial neutron flux distribution calculations with MCNP with  $^{197}\text{Au}(n, \gamma)^{198}\text{Au}$  reaction rate distribution measurements at the JSI TRIGA Mark II reactor." Applied Radiation and Isotopes 84 (2014): 57-65.
6. Bell, George I., and Samuel Glasstone. Nuclear Reactor Theory. No. TID-25606. Division of Technical Information, US Atomic Energy Commission, 1970.
7. Sood, Avneet, R. Arthur Forster, and D. Kent Parsons. "Analytical benchmark test set for criticality code verification." Progress in Nuclear Energy 42.1 (2003): 55-106.