# ترازها و توابع موج تک ذره ای نوترونی حالت S به روش تحلیلی

**رحیمیان، نعیمه- علوی، سیدعلیرضا- دهقانی، وحید**
دانشگاه سیستان و بلوچستان، دانشکده علوم پایه، گروه فیزیک

**چکیده:**

*در این تحقیق، روش حل تحلیلی و دقیق معادله شرودینگر برای پتانسیل میدان میانگین وودز-ساکسون برای تعیین ترازها و توابع موج تک ذره ای نوترونی حالت S با استفاده از روش Nikiforov-Uvarov (NU) ارائه شده است. ویژه توابع و ویژه مقادیر مربوط به ترازهای انرژی مقید نوترون با اعمال شرایط مرزی و با استفاده از روش گرافیکی تعیین شده است. نتایج بدست آمده با نتایج حل عددی معادله شرودینگر و حل تقریبی در پایه‌های نوسانگر هماهنگ مقایسه شده است.*

# Levels and wave function of S-state neutron single particle by analytic method

**Rahimian, Naeemeh; Alavi , Seyed Alireza; Dehghani, Vahid**
Department of Physics, University of Sistan and Baluchestan, Zahedan

**Abstract**

In this investigation, by using Nikiforov-Uvarov (NU) method the analytics and accurate solution of Schrodinger equation for mean-field Woods-Saxon potential has been given for determination of levels and wave function of S-state neutron single particle. Eigen functions and corresponding Eigen value of bound energy levels of neutron have been determined by considering boundary conditions and using graphical solution. Obtained results have been compared with the results of numerical solution of Schrodinger equation and approximate solution in harmonic oscillator basis.

*Key Words: Woods-Saxon potential, harmonic oscillator, mean-field.*

**مقدمه:**

حل معادله شرودینگر و تعیین توابع موج و ترازهای انرژی تک ذره‌ای اهمیت بسیار زیادی در مباحث مختلف فیزیک هسته‌ای دارد. معادله شرودینگر با توجه به شکل انرژی پتانسیل می‌تواند به روش تحلیلی، تقریبی و یا عددی حل شود. مدل لایه‌ای هسته‌ای، یکی از مدل‌های هسته‌ای است که براساس پتانسیل هسته-ای میدان میانگین پدیده شناختی بنا شده است. پتانسیل‌های چاه مربعی، نوسانگر هارمونیک، وودز –

ساکسون $(WS)$ و پتانسیل $SV$ چند نمونه از پتانسیل‌های میدان میانگین است[1-3]. حل تحلیلی و دقیق معادله شرودینگر با توجه به کاربردهای گسترده تابع موج و تراز انرژی در مطالعه ساختار هسته و واکنش-های هسته‌ای از اهمیت زیادی برخوردار است. ترازهای انرژی و توابع برای پتانسیل نوسانگر هارمونیک بصورت تحلیلی و دقیق بدست می‌آید که کاربردهای گسترده در فیزیک اتمی مولکولی و فیزیک هسته‌ای و ذرات بنیادی دارد. تاکنون حل تحلیلی و دقیق برای ترازهای انرژی و توابع موج برای پتانسیل $WS$ با درنظرگرفتن پتانسیل اسپین–مدار ارائه نشده است و با استفاده از روش‌های عددی تعیین می‌شود. به منظور استفاده از ترازهای انرژی و توابع موج بصورت تحلیلی می‌توان به روش حل تحلیلی و تقریبی پتانسیل $WS$ در پایه‌های نوسانگر هارمونیک اشاره کرد. در حالت خاص $S$، ترازهای انرژی و توابع موج تک ذره‌ای نوترونی را می‌توان برای بصورت تحلیلی و دقیق با استفاده از روش $NU$، اعمال شرایط مرزی و روش حل گرافیکی تعیین کرد.

**روش کار:**

تابع موج و تراز انرژی تک نوکلئونی با استفاده از معادله شرودینگر برای یک پتانسیل میدان میانگین هسته‌ای مناسب حاصل می‌شود. معادله شرودینگر شعاعی تک نوکلئونی برای پتانسیل مرکزی به این صورت است:

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2m}(\nabla_r^2-\frac{l(l+1)}{r^2})+V(r)\right]\psi(r)=E\psi(r) \qquad (۱)$$

با معرفی تابع موج شعاعی کاهش یافته به صورت $R(r)=r\psi(r)$ (تابع موج $\psi(r)$ با استفاده از رابطه $\int|\psi(r)|^2 d^3r=1$ نرمالیزه می‌شود) معادله(۱) به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\frac{d^2R(r)}{dr^2}+\frac{2m}{\hbar^2}\left[E-V(r)-\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}\right]R(r)=0 \qquad (۲)$$

در رابطه (۲) پتانسیل تک ذره‌ای نوترون می‌تواند بصورت مجموع پتانسیل هسته‌ای و پتانسیل اسپین–مدار باشد. برای حالت $S$ $(l=0)$ پتانسیل اسپین–مدار صفر و رابطه (۲) با در نظر گرفتن پتانسیل هسته‌ای وودز–ساکسون بصورت زیر نوشته می‌شود.

$$\frac{d^2R(r)}{dr^2}+\frac{2m}{\hbar^2}\left[E-\frac{-V_0}{1+e^{(r-R_0)/a}}\right]R(r)=0 \qquad (۳)$$

$V_0$، $R_0$ و $a$ به ترتیب عمق چاه پتانسیل، شعاع هسته و پارامتر پخش شدگی سطحی است. بـرای حـل ایـن معادله باید از متغیرهای جدید استفاده کرد. با انتخاب متغیر جدید بصورت زیر

$$y = \frac{1}{1+e^{(r-R_0)/a}} \tag{۴}$$

پتانسیل وودز– ساکسون به فرم ساده $V_{WS} = -V_0 y$ تبدیل می‌شود و با جایگذاری آن در رابطه (۳)، رابطه (۳) بصورت زیر بازنویسی می‌شود

$$\begin{gathered} y(1-y)R'' + (1-2y)R' + \frac{-\varepsilon^2 + \beta^2 y}{y(1-y)} R = 0 \\ -\varepsilon^2 = \frac{2ma^2 E}{\hbar^2}; \quad \beta^2 = \frac{2ma^2 V_0}{\hbar^2} \end{gathered} \tag{۵}$$

که در آن برای حل معادله (۵) باید آن را به شکل معادله دیفرانسیلی شـناخته شـده‌ای تبـدیل کـرد کـه روش نیکوفورو–یوواروف NU روش مناسبی است. برای استفاده از این روش باید معادلـه دیفرانسـیلی را بـه فـرم زیر تبدیل کرد[4].

$$\psi''(y) + \frac{\tilde{\tau}(y)}{\sigma(y)}\psi'(y) + \frac{\tilde{\sigma}(y)}{\sigma(y)^2}\psi(y) = 0 \tag{۶}$$

با انتخاب $R(y)$ بصورت رابطه زیر

$$R(y) = \phi(y) f(y) \tag{۷}$$

و استفاده از روش جداسازی منغیرها و روش NU به رابطه‌های زیـر می‌رسیم.

$$\phi(y) = y^{\varepsilon}(1-y)^{\mu} \tag{۸}$$

$$y(1-y) f'' + \left[(2\varepsilon+1) - y(2\varepsilon+2\mu+2)\right] f' - \left[(\varepsilon+\mu)(\varepsilon+\mu+1)\right] f = 0 \tag{۹}$$

که در آن $\mu = \sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2}$ است. جواب معادله (۹) یـک معادلـه دیفرانسـیلی فـوق هندسـی اسـت کـه بـه صورت زیر می‌باشد.

$$f = {}_2F_1(a,b,c;y) \tag{۱۰}$$

که در آن:

$$\begin{gathered} a = (\mu+\varepsilon) \\ b = a+1 \\ c = 2\varepsilon+1 \end{gathered} \tag{۱۱}$$

تابع موج بصورت زیر بدست می آید

$$R(y) = N\, y^{\varepsilon}(1-y)^{\mu}\, {}_2F_1(a,b,c;y) \tag{۱۲}$$

با اعمال شرایط مرزی روابط زیر بدست می آید [5]

$$\frac{\lambda R_0}{a} - \sum_{n=0}^{\infty}\left(\tan^{-1}\frac{2\lambda}{n} - \tan^{-1}\frac{\lambda}{n+\varepsilon} - \tan^{-1}\frac{\lambda}{n+\varepsilon+1}\right) + \tan^{-1}\frac{\lambda}{\varepsilon} + \tan^{-1}\frac{\lambda}{\varepsilon+1} = n\pi \tag{۱۳}$$

$$\Phi(\xi) = k_0R_0\xi + \tan^{-1}\left(\frac{\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)} + \left(\frac{1}{k_0a}\right)}\right) - \sum_{n=0}^{\infty}\left[\tan^{-1}\left(\frac{2k_0a}{n}\xi\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)} + \left(\frac{n}{k_0a}\right)}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)} + \left(\frac{n+1}{k_0a}\right)}\right)\right] \tag{۱۴}$$

که در آن $k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - |E|)}$ ، $k_0 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}V_0}$ ، $\xi = \frac{k}{k_0} = \sqrt{1-\frac{|E|}{V_0}}$ و $\lambda = i\mu$ است.

بنابراین شرایط ویژه مقادیر انرژی تابعی از $\xi$ به دست می‌آید.

$$-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \tan\Phi(\xi) \tag{۱۵}$$

مقادیر $\xi$ در رابطه (۱۵) را می‌توان به آسانی از روش حل گرافیکی بـه دسـت آورد. بنـابراین ویـژه مقـادیر انرژی تک ذره نوترون با داشتن $\xi$ و جایگذاری آن در رابطه زیر به دست می‌آید.

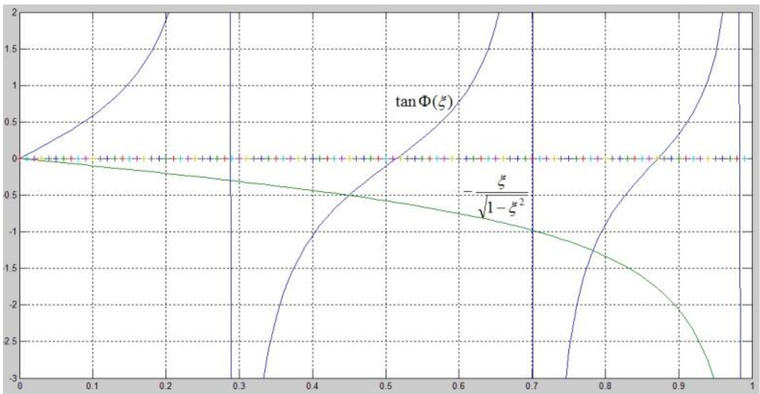
$$|E| = V_0(1-\xi^2) \tag{۱۶}$$

پارامتر $\xi$ برای هسته‌های مختلف متفاوت است. بنابراین همانطور که انتظار داریم ویژه مقـادیر انـرژی تـک ذره نوترون به پارامترهای پتانسیل هسته‌ای وابسته است.

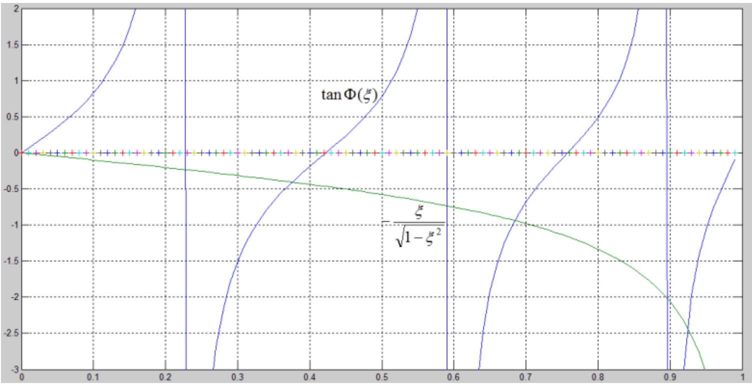
## نتایج:

شکل (۱) نشـان مـی‌دهـد در روش حـل گرافیکـی بـرای هسـته $^{56}Ni$ مقـادیر قابـل قبـول $\xi$ در محـدوده $1 > \xi > 0$ استفاده شده است. با توجه به شکل می‌توان دید که تابع $\tan\Phi(\xi)$ و $-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$ در دو نقطه $\xi = 0.44$ و $\xi = 0.77$ متقاطع‌اند. بنابراین با استفاده از معادله (۱۵) انرژی متنـاظر تـک ذره نـوترون بـرای

تراز $S$ به ترتیب $E=-41.13MeV$ و $E=-20.76MeV$ بدست می‌آید. شکل (۲) نتایج مشابه را برای هسته $^{109}Sn$ نشان می‌دهد. برای تعدادی از هسته‌های سبک، نیمه سنگین و سنگین نتایج مربوط به ترازهای انرژی تک ذره‌ای محاسبه شده با استفاده از روش تحلیلی (ارائه شده در قسمت قبل)، روش عددی (بدست آمده از حل معادله شرودینگر به روش عددی) و روش تقریبی (بدست آمده با استفاده از قطری کردن ماتریس هامیلتونی در پایه‌های نوسانگر هارمونیک) در جدول (۱) ارائه شده است. در محاسبات از پارامترهای $V_0=51-33(N-Z)/A$، $R_0=1.27A^{1/3}$ و $a=0.67\ fm$ در پتانسیل وودز-ساکسون استفاده شده است.




**شکل ۱: حل گرافیکی رابطه (۱۵) برای $^{56}Ni$. محور افقی تغییرات پارامتر بدون بعد $\xi$ را نشان می‌دهد.**




**شکل ۲:مشابه شکل ۱ برای $^{109}Sn$**

**جدول (۱)**: ویژه مقادیر انرژی تک ذره‌ای نوترون با استفاده روش تحلیلی، عددی و تقریبی برای حالت‌های S

| تقریبی | عددی | تحلیلی | انرژی (MeV) |
|---|---|---|---|

| هسته | $1s_{\frac{1}{2}}$ | $2s_{\frac{1}{2}}$ | $3s_{\frac{1}{2}}$ | $1s_{\frac{1}{2}}$ | $2s_{\frac{1}{2}}$ | $3s_{\frac{1}{2}}$ | $1s_{\frac{1}{2}}$ | $2s_{\frac{1}{2}}$ | $3s_{\frac{1}{2}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $^{16}O$ | –31,39 | | | -30.98 | -3.82 | | -31.09 | –3.92 | |
| $^{33}Si$ | –32.59 | -10.38 | | -32.85 | –9.57 | | -32.94 | -9.78 | |
| $^{40}Ca$ | –25.39 | –15.87 | | –38.76 | –15.45 | | –38.84 | –15.68 | |
| $^{56}Ni$ | –41.13 | –20.76 | | -41.00 | -20.24 | | -41.08 | –20.47 | |
| $^{88}Kr$ | –37.80 | –21.02 | -2.66 | -37.76 | -21.30 | -3.29 | -37.81 | -21.49 | -3.46 |
| $^{109}Sn$ | -42.02 | -26.60 | –6.52 | –41.84 | –26.61 | -8.20 | –41.89 | -26.80 | -8.48 |
| $^{127}Ba$ | -41.33 | -27.81 | -9.79 | –41.32 | –27.31 | -9.78 | -41.37 | -27.48 | -10.06 |
| $^{178}Ta$ | -40.45 | -28.84 | -13.27 | -40.50 | -28.90 | -13.45 | -40.53 | -29.05 | -13.71 |
| $^{230}Pa$ | -40.40 | -30.28 | -17.27 | -40.28 | -30.27 | -16.42 | -40.31 | –30.40 | -16.66 |
| $^{252}Es$ | -40.48 | -31.12 | –17.88 | –40.33 | -30.84 | –17.54 | -40.36 | -30.96 | -17.77 |

## بحث ونتیجه گیری:

با حل تحلیلی و دقیق معادله شرودینگر برای پتانسیل وودز–ساکسون با استفاده از روش *NU* ویژه توابع و ویژه مقادیر مربوط به ترازهای انرژی مقید نوترون با اعمال شرایط مرزی و با استفاده از روش گرافیکی بدست آمد. نتایج بدست آمده برای ترازهای انرژی تک ذره‌ای نوترونی با روش عددی حل مستقیم معادله شرودینگر و روش تقریبی مقایسه شد. نتایج بدست آمده همخوانی خوب بین ترازهای انرژی بدست آمده از هر سه روش را نشان می‌دهد.

## مراجع:


1. J. Suhonen, *From Nucleons to Nucleus* (Springer-Verlag 2007).
2. M. R. Pahlavani and S. A. Alavi, *Study of Nuclear Bound States Using Mean-Field Woods Saxon and Spin-Orbit Potentials*, Modern Physics Letters A, Vol. 27, No. 29 (2012).
3. P. Salamon and T. Vertse, *New simple form for a phenomenological nuclear potential ,Phys. Rev*. C 77, 037302 (2008).
4. A. F. Nikiforov and V. B. Uvarov, *Special Functions of Mathematical Physics* (Birkhauser 1988).
5. S. Flugge, *Practical Quantum Mechanics* (Springer-Verlag 1994).