محاسبهٔ طیف انرژی نوترون با در نظر گرفتن AMM در حضور میدان مغناطیسی قوی متغیر به کمک روش Nikiforov-Uvarov

مسعود صیدی

گروه فیزیک، دانشکده علوم، صندوق پستی: ۶۹۳۱۵-۵۱۶ ،دانشگاه ایلام

چکیده

میدان مغناطیسی قوی در ستاره های نوترونی میتواند منجر به واپاشی بتازا بشود. در این مقاله معادلهٔ دیراک – پائولی برای نوترون با در نظر گرفتن گشتاور مغناطیسی ناهنجار (AMM) آن، در حضور میدان مغناطیسی قوی متغیر با تقارن استوانه ای، به کمک روش Nikiforov-Uvarov (NU) حل شده و طیف انرژی آن بدست آمده است. این محاسبات از دیدگاه اختر فیزیک هسته ای میتواند در محاسبهٔ سطح مقطع واپاشی نوترون حائز اهمیت باشد.

کلیدواژگان: *گشتاور مغناطیسی ناهنجار، معادلهٔ دیراک – پائولی، روش NU*

Calculating of neutron energy spectrum with account of AMM in the presence of a strong magnetic field using the Nikiforov-Uvarov method

Seidi, Masoud

Faculty of Basic Sciences, Department of Physics, P.O. Box: 516-69315, University of Ilam, Ilam, Islamic Republic of Iran

Abstract

A strong magnetic field can lead to Beta-decay in neutron stars. In this paper, the Dirac-Pauli equation for a neutron with account of Anomalous Magnetic Moment (AMM) in the presence of a strong magnetic field with a cylindrical symmetry using the Nikiforov-Uvarov method (NU) has solved and its energy spectrum has obtained. These calculations from the perspective of nuclear astrophysics can be important in calculating the neutron decay cross section.

Key words: Anomalous Magnetic Moment, Dirac-Pauli equation, Nikiforov-Uvarov method (NU).

مقدمه

بررسی فرایند های ضعیف در حضور میدان مغناطیسی قوی در یک مادهٔ فوق چگال از دید گاه اخترفیزیکی حائز اهمیت است، چون این مسئله با ستاره های نوترونی در ارتباط است. ستاره های نوترونی دارای جرم فوق چگالی با چگالی در حدود $\rho \approx 2.8\times10^{14}\ gr/cm^3$ میباشند[1]. این جرم فوق چگال باعث ایجاد یک میدان مغناطیسی بسیار بزرگ میشود. برای اکثر رادیو پالسارها شدت میدان مغناطیسی روی سطح در حدود $B \approx 10^{12}-10^{14}G$ میباشد [2-3]. مگنتارها که ردهٔ دیگری از این ستاره های مغناطیسی هستند که شدت میدان مغناطیسی روی سطح آنها در حدود $B \approx 10^{16}G$ است[4]. یکی از واکنشهایی که منجر به خنک شدن ستاره های نوترونی میشود، فرایند واپاشی بتازای مثبت است ($p \to n+e^+ +\nu_e$) [5]. برای محاسبهٔ طیف انرژی نوترون در فرایند واپاشی بتازا تحت تاثیرمیدانهای مغناطیسی قوی در حد غیرنسبیتی باید معادلهٔ دیراک را به معادلهٔ پائولی تبدیل کرد. این معادله شکل تعمیم یافته ای از معادلهٔ شرودینگر است. حل معادلهٔ شرودینگر جهت بدست آوردن طیف انرژی و ویژه توابع در حضور پتانسیل های مختلف در مدلهای فیزیکی هنوز مورد توجه محققین میباشد [6,7]. روشهای زیادی برای حل معادلهٔ شرودینگر وجود دارد، از قبیل: روش ابرتقارنی ناوردای شکلی[1] [8] روش وردشی[2] [9] روش تکرار مجانبی[3](AIM)[10] ، روش NU [11] وغیره. روش NU طیف وسیعی از معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ دوم با ساختار فوق هندسی در فیزیک را در بر میگیرد. با این روش معادلهٔ شرودینگر در حضور پتانسیل تعمیم یافته مورس[12]، پتانسیل وود-ساکسون [13]، پتانسیل هولتن[14]، پتانسیل اکارت[15]، پتانسیل مارکو[16]، پتانسیل هلمن،[17] یوکاوا [18] و بسیاری دیگر از پتانسیل ها به طور تحلیلی حل شده و طیف انرژی و ویژه توابع آنها بدست آمده است. در این مقاله ما طیف انرژی نوترون را با در نظر گرفتن AMM نوترون در حضور میدان مغناطیسی قوی با تقارن استوانه ای به کمک روش NU محاسبه کرده و وابستگی طیف انرژی به پارامترهای میدان مغناطیسی خارجی و AMM نوترون را نشان داده ایم. این محاسبات در بررسی سطح مقطع های واپاشی حائز اهمیت میباشند.

روش NU:

بسیاری از مسائل مهم در فیزیک و ریاضی به معادلهٔ دیفرانسیل زیر منجر میشوند [10]:

$$u''(z)+\frac{\tilde{\tau}(z)}{\sigma(z)}u'(z)+\frac{\tilde{\sigma}(z)}{\sigma^2(z)}u(z)=0 \qquad (۱)$$

در رابطهٔ (۱) $\tilde{\sigma}(z)$ و $\sigma(z)$ چند جمله ایهای حداکثر از درجهٔ دو و $\tilde{\tau}(z)$ چندجمله ای حداکثر از درجهٔ یک میباشند. با انتخاب $u=\phi(z)y$ معادلهٔ (۱) به صورت زیر تبدیل میشود:

$$y''+\left(\frac{2\phi'}{\phi}+\frac{\tilde{\tau}}{\sigma}\right)y'+\left(\frac{\phi''}{\phi}+\frac{\phi'}{\phi}\left(\frac{\tilde{\tau}}{\sigma}\right)+\frac{\tilde{\sigma}}{\sigma^2}\right)y=0 \qquad (۲)$$

ضرایب y' به صورت τ/σ میباشند، لذا میتوان نوشت:

$$\frac{\phi'}{\phi}=\frac{\pi}{\sigma} \quad , \quad \pi=\frac{1}{2}(\tau-\tilde{\tau}). \qquad (۳)$$

π در رابطهٔ (۳) حداکثر از درجهٔ یک میباشد. با محاسبهٔ مشتقات ϕ''/ϕ و ϕ'/ϕ و قرار دادن آنها در رابطهٔ (۲) حاصل میشود:

---

1 . Super-symmetric Shape Invariance Method

2 . Variational Method

3 . Asymptotic Iteration Method

$$y''+\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)y'+\left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma^2}\right)y=0$$
$$\tau=\tilde{\tau}+2\pi \qquad (۴)$$
$$\bar{\sigma}=\tilde{\sigma}+\pi^2+\pi\left(\tilde{\tau}-\sigma'\right)+\pi'\sigma$$

$\tau(z)$ و $\bar{\sigma}(z)$ چند جمله ایهای حداکثر از درجهٔ دو و یک هستند. معادلهٔ (۴) و (۱) شبیه به هم هستند لذا تبدیلات مربوطه شکل و نوع معادله را تغییر نمی دهند. حال باید ضرایب $\pi(z)$ را طوری انتخاب کرد که چندجمله ای $\bar{\sigma}(z)$ قابل تقسیم باشد، یعنی:

$$\bar{\sigma}(z)=\lambda\sigma(z) \qquad (۵)$$

که در اینجا λ مقداری ثابت است. با این انتخاب $\pi(z)$ به صورت زیر حاصل میشود:

$$\pi=\left(\frac{\sigma'-\tilde{\tau}}{2}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma'-\tilde{\tau}}{2}\right)^2-\tilde{\sigma}+k\,\sigma} \qquad (۶)$$

در ارابطهٔ (۶) $k=\lambda-\pi'(z)$ است. از آنجایی که $\pi(z)$ یک چند جمله ای است بنابراین زیر رادیکال باید مربع یک چند جمله ای باشد. با استفاده از ریشهٔ معادلهٔ (۶) میتوان طیف انرژی را محاسبه کرد. ثابت میشود همهٔ مشتقات توابع از نوع فوق هندسی باز فوق هندسی میباشند با اینحال میتوان ثابت کرد که معادلهٔ (۴) یک معادلهٔ فوق هندسی است لذا با انتخاب $v_n(z)=\partial_z^n y$ حاصل میشود:

$$\sigma(z)v_n''+\tau_n(z)v_n'+\eta_n(z)v_n=0 \qquad (۷)$$

پارامترهای η_n و τ_n در رابطهٔ (۷) عبارتند از:

$$\tau_n(z)=\tau(z)+n\sigma'(z)$$
$$\eta_n(z)=\lambda+n\,\tau'(z)+\frac{n(n-1)}{2}\sigma''(z) \qquad (۸)$$

هر جواب معادلهٔ (۷) برای $\eta_k(z)\neq 0$ ، ($k=0,1,....,n-1$) میتواند به صورت $v_n(z)=\partial_z^n y$ نمایش داده بشود. این خاصیت باعث میشود ویژه جوابهایی از معادله (۱) به ازای مقدار ثابت λ-ی داده شده ساخت، در واقع وقتی $\eta_n(z)=0$ باشد، ویژه جواب $v_n(z)$ مقدار ثابتی خواهد بود و این یعنی هرگاه رابطهٔ زیر برقرار باشد:

$$\lambda=\lambda_n=-n\,\tau'(z)-\frac{n(n-1)}{2}\sigma''(z) \qquad (۹)$$

آنگاه معادلهٔ فوق هندسی (۷) یک جواب به شکل $y(z)=y_n(z)$ دارد که یک چند جمله ای از درجهٔ n میباشد. شکل این جوابها در فرم رودریگرز به صورت زیر بیان میشود:

$$y_n(z)=\frac{B_n}{\rho(z)}\frac{d^n}{dz^n}\left(\sigma^n(z)\rho(z)\right) \qquad (۱۰)$$

که B_n ضریب نرمالیزاسیون و $\rho(z)$ تابع وزنی است که باید در شرط $(\sigma\rho)'=(\tau\rho)$ صدق کند [10].

حل معادلهٔ دیراک- پائولی در حضور میدان مغناطیسی متغیر با روش NU:

در حد غیر نســـبیتی برای یـافتن طیف انرژی و توابع موج باید معادلهٔ دیراک را به معادلهٔ پائولی تبدیل کرد [19, 20]. معادلهٔ دیراک برای فرمیونهای دارای AMM در میدان مغناطیسی خارجی به شکل زیر بیان میشود[1]،

$$i\,\partial_t\psi\left(r,t\right)=\left(\alpha.P+\rho_3 m-\mu\rho_3\left(\sigma.B\right)\right)\psi\left(r,t\right),\quad \psi\left(r,t\right)=\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} \tag{۱۱}$$

کـه در آن α و β مـاتریس هـای دیـراک و $P=-i\nabla-eA$ و μ بـه ترتیـب تکانـه و ممـان مغناطیســی ناهنجـار فرمیـون مربوطه هستند. معادلهٔ (۱۱) با قرار دادن اسپینورها به شکل زیر ساده میشود:

$$m_0\begin{bmatrix}\varphi\\ \chi\end{bmatrix}+i\,\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix}\varphi\\ x\end{bmatrix}=\left[\begin{pmatrix}0 & \sigma.P\\ \sigma.P & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}m_0-\mu\sigma.B & 0\\ 0 & -m_0+\mu\sigma.B\end{pmatrix}\right]\begin{bmatrix}\varphi\\ \chi\end{bmatrix}, \tag{۱۲}$$

حد غیر نسبیتی معادلات کوپل شدهٔ (۱۲) با استفاده از تقریبات زیر حاصل میگردد،

$$\left|i\frac{\partial\chi}{\partial t}\right|<<\left|2m_0\chi\right| \quad , \quad \left|\mu\sigma.B\chi\right|<<\left|2m_0\chi\right|. \tag{۱۳}$$

در تقریب (۱۳) انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل در مقایسه با انرژی جرم سکون ناچیز و قابل صرف نظر کردن هستند لذا با اعمال این تقریب در معادلهٔ (۱۲) به معادلهٔ پائولی میرسیم،

$$i\,\frac{\partial}{\partial t}\varphi=\left[\frac{1}{2m_o}(\vec{p}-e\vec{A})^2-\left(\mu+\frac{e}{2m_o}\right)\left(\sigma.\vec{B}\right)\right]\varphi, \tag{۱۴}$$

برای اسپینور φ پاسخ حالت ایستا چنین خواهد بود:

$$\varphi(\vec{r},t)=\begin{pmatrix}\psi_1(r)\\ \psi_2(r)\end{pmatrix}e^{-i\varepsilon t} \tag{۱۵}$$

که در آن ε انرژی فرمیون در حد غیر نسبیتی است. ما در اینجا سعی داریم که معادله پائولی را در حضور میدان مغناطیسی متغیر با تقارن استوانه ای حل کنیم بنابراین برای میدان مغناطیسی خارجی، پیمانهٔ $\vec{A}$ را به شکل زیر انتخاب میکنیم:

$$\vec{B}(r)=(0,0,\frac{a}{r}+b) \quad , \quad \vec{A}\left(r,\phi,z\right)=\left(0,\frac{br}{2}+a,0\right) \tag{۱۶}$$

با قرار دادن تابع موج (۱۵) و رابطهٔ (۱۶) در معادله (۱۴) معادلات کوپل شدهٔ زیر حاصل میشود:

$$\begin{cases}\varepsilon\psi_1=\left[\dfrac{1}{2m_o}\left(\vec{p}-e\vec{A}\right)^2-\left(\mu+\dfrac{e}{2m_o}\right)\left(\dfrac{a}{r}+b\right)\right]\psi_1\\[2ex] \varepsilon\psi_2=\left[\dfrac{1}{2m_o}(\vec{p}-e\vec{A})^2+(\mu+\dfrac{e}{2m_o})\left(\dfrac{a}{r}+b\right)\right]\psi_2\end{cases} \tag{۱۷}$$

رابطهٔ (۱۷) برای نوترون ($e=0$) در سیستم مختصات استوانه ای به صورت زیر تبدیل میشود:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{r\psi_1}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\,\dfrac{\partial\psi_1(r)}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2\psi_2}\dfrac{\partial^2\psi_2(\varphi)}{\partial\varphi^2}+\dfrac{1}{\psi_3}\dfrac{\partial\psi^2{}_3(z)}{\partial z^{\,2}}\mp 2m_n\mu_n(\dfrac{a}{r}+b)=0\\[2ex] \psi_n\left(\vec{r}\right)=\psi_1\left(r\right)\psi_2\left(\varphi\right)\psi_3\left(z\right)\begin{pmatrix}C_{1n}\\ C_{2n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\psi_{1n}\left(\vec{r}\right)\\ \psi_{2n}\left(\vec{r}\right)\end{pmatrix}\end{cases} \tag{۱۸}$$

به کمک جداسازی متغییر ها تابع موج کلی برای نوترون به صورت زیر حاصل میشود:

$$\psi_{1n,2n}(\vec{r})=\frac{1}{\sqrt{2l}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{il\varphi}e^{izk_3}f\,(r)\begin{pmatrix}C_{1n}\\C_{2n}\end{pmatrix} \qquad (۱۹)$$

که در آن $k_3=\frac{2\pi}{l}n_3\,,n_3=\pm1,\pm2,\cdots$ می باشد. ضرایب اسپینوری C_{1n} و C_{2n} فقط به اسپین بستگی دارند و مقدار آنها برابر است با:

$$C_{1n,2n}=1\pm s_n \quad , \quad s_n=\pm1. \qquad (۲۰)$$

s_n در رابطهٔ (۲۰) مشخص کننده پلاریزاسیون اسپین در امتداد میدان یا مخالف آن می باشد. با قرادادن رابطهٔ (۱۹) در (۱۸) حاصل میشود،

$$f''(r)+\frac{1}{r}f'(r)+(2m_n\varepsilon\pm2m_n\mu_n\left(\frac{a}{r}+b\right)-\frac{l^2}{r^2}-k_3^2)f\,(r)=0 \qquad (۲۱)$$

معادلهٔ (۲۱) با تغییر متغیر $f\,(r)=\frac{u(r)}{\sqrt{r}}$ به صورت زیر تبدیل میشود:

$$\frac{d^2u(r)}{dr^2}+\left[\frac{8\left(m_n\varepsilon\pm m_n\mu_nb-k_3^2\right)\pm\left(8m_n\mu_na\right)r-\left(l^2-\frac{1}{4}\right)}{r^2}\right]u(r)=0 \qquad (۲۲)$$

$$-A_\pm^2=8\left(m_n\varepsilon\pm m_n\mu_nb-k_3^2\right),-B_\pm^2=\pm\left(8m_n\mu_na\right),\lambda=\left(l^2-\frac{1}{4}\right)$$

با استفاده از رابطهٔ (۶) داریم:

$$\pi=\frac{1}{2}\left[1\pm\sqrt{4A_\pm^2r^2+\left(4B_\pm^2+4k\right)r+\left(4\lambda+1\right)}\right] \qquad (۲۳)$$

π یک چند جمله ای از درجهٔ حداکثر یک میباشد بنابراین زیر رادیکال باید مربع یک چند جمله ای از درجهٔ یک باشد. با قراردادن زیر رادیکال برابر صفر، میتوان ریشه ها را بدست آورد. برای اینکه دو ریشهٔ یکسان داشته باشیم بایستی Δ -ی ریشه ها برابر صفر باشد. با این رهیافت مقدار مجهول k برابر خواهد شد با:

$$k=\pm lA_\pm-B_\pm^2 \qquad (۲۴)$$

با قرار دادن رابطهٔ (۲۴) در رابطهٔ (۲۳) حاصل میشود:

$$\pi=\begin{cases}\frac{1}{2}\left[1\pm\left(2A_\pm r+l\right)\right], & k=k_+\\ \frac{1}{2}\left[1\pm\left(2A_\pm r-l\right)\right], & k=k_-\end{cases} \qquad (۲۵)$$

بنابراین طیف انرژی نوترون با استفاده از رابطهٔ (۲۵)، (۲۴) و رابطهٔ (۹) به صورت زیرحاصل میشود:

$$\varepsilon_{n,l}=2\left(\frac{k_3^2}{2m_n}\right)\mp\mu_nb-8m_n\left(\frac{\mu_na}{2n+l+1}\right)^2 \qquad (۲۶)$$

از رابطهٔ (۲۶) وابستگی انرژی نوترون به ممان مغناطیسی ناهنجار و ثابت های میدان مغناطیسی کاملاً مشهود است. در $a=0$ طیف حاصل از میدان ثابت بدست می آید که مقداری ثابت و مستقل از اعداد کوانتومی n و l میباشد.

نتیجه گیری

در ایـن مقالـه بـه کمـک روش NU طیـف انـرژی نـوترون در یـک میـدان مغناطیسـی متغیـر بـا تقـارن اسـتوانه ای و بـا در نظـر گـرفتن AMM نوترونها محاسبه شده است. طیف حاصـل یـک تقریـب غیـر نسـبیتی از معادلـۀ نسـبیتی دیـراک اسـت. بـا توجـه بـه رابطـۀ (۲۶) واضح اسـت کـه AMM نـوترون، پـارامتری اسـت کـه در محاسـبۀ سـطح مقطـع واپاشـی بتـازا در میـدانهای مغناطیسـی قـوی بـه دلیـل تـأثیر آن روی طیـف انـرژی نـوترون حـائز اهمیـت اسـت. تقریـب بهتـر بـرای محاسـبۀ طیـف نـوترون از حـل معادلـۀ دیـراک حاصـل میشود که در دست انجام است.

منابع

[1]: V. L. Kauts, A.M.Savochkin, and A. I. Studenikin, Asymmetry of Neutrino Emission from Neutron Beta Decay in Superdense Matter and a Strong Magnetic Field, Physics of Atomic Nuclei, , Vol. 69, No. 9, pp. 1453–1460 (2006).
[2]: T. A.Miharaetal, Nature 346, 250 (1990).
[3]: C. Thompson and R. C. Duncan, Astrophys. J. 473, 322 (1996).
[4]: C. Thompson and A. Harding, Astrophys. J. 408, 194 (1993).
[5]: D. A. Baiko and D. G. Yakovlev, Direct URCA process in strong magnetic fields and neutron star cooling, Astronomy and Astrophysics, v.342, p.192-200 (1999).
[6]: B.I. Ita, C.O. Ehi-Eromosele, A. Edobor-Osoh, A.I. Ikeuba, in: AIP Conference Proceedings, vol. 169,p. 360. (2014).
[7]: S.M. Ikhdair, R. Sever, Int. J. Mod. Phys. A 21, 6465 (2006).
[8]: C.S. Jia, T. Chen, S. He, Phys. Lett. A 377, 682 (2013).
[9]: B. Batiha, Aust. J. Basic Appl. Sci. 3, 3826 (2009).
[10]: K.J. Oyewunmi, B.J. Falaye, C.A. Onate, O.J. Oluwadare, W.A. Yahya, Int. J. Mod. Phys. E 23, 1450005 (2014).
[11]: A.F. Nikiforov, V.B. Uvarov, *Special Functions of Mathematical Physics*, Birkhauser,Verlag, Basel, (1988).
[12]: L.H. Zhang, X.P. Li, C.S. Jia, Int. J. Quantum Chem. 111, 1870 (2011).
[13]: B. Gonul, K. Koksal, Phys. Scr. 76, 565 (2007).
[14]: S. Meyur, S. Debnath, Mod. Phy. Lett. A 23, 2077 (2008).
[15]: W.C. Qiang, J.Y. Wu, S.H. Dong, Phys. Scr. 79, 065011 (2009).
[16]: A.A. Makarov, J.A. Smorodinsky, Kh Valiev, P. Winternitz, Nuov. Cim. A 52, 1061 (1967).
[17]: R.K. Amlan, J. Math. Chem. 44, 260 (2008).
[18]: C.A. Onate, Afr. Rev. Phys. 8, 0046 (2013).
[19]: J. B. Bjorken and S. D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics*, McGraw-Hill (1964).
[20]: W. Greiner, *Relativistic Quantum Mechanics Wave Equations*, theird Edition, Springer- Verleg Berlin (2000).