رفتارهای متفاوت تابع ساختار سیستم های چندفرمیونی در تکانه های انتقالی خیلی کوچک و تعریف جدید برای تابع پاسخ سیستم

یحیی یونسی‌زاده[۱،۲][۱]

[۱]دانشگاه آزاد تهران جنوب،دانشکده علوم پایه،گروه فیزیک

[۲]دانشگاه فرهنگیان، پردیس چمران تهران، دانشکده شهید بهشتی،گروه علوم پایه، بخش فیزیک

چکیده

تابع ساختار سیستم های چندفرمیونی را برحسب نوسانات دانسیته ذرات هدف می‌نویسیم و مقدار این تابع را در تکانه انتقالی صفر بدست می‌آوریم. ما نشان می‌دهیم که مقدار این تابع در تکانه انتقالی صفر از دو راه مختلف که یکی راه ریاضی مستقیم و دیگری قوانین جمع مایعات کوانتونی می‌باشند، برابر نیستند و این یک پارادوکس برای سیستم های چندفرمیونی است. ما در نهایت برای برطرف کردن این پارادوکس، تابع پاسخ و در نتیجه تابع ساختار سیستم های چند فرمیونی را تصحیح میکنیم و تعریف جدیدی را برای این توابع ارائه می‌دهیم. این تعریف جدید با تجربه همخوانی دارد.

کلمات کلیدی: *تابع پاسخ سیستم های چندفرمیونی، تابع ساختار سیستم های چندفرمیونی، تکانه های انتقالی، انرژی انتقالی، دانسیته ذرات.*

[۱] نویسنده مسئول:younesiyahya@gmail.com

The different behavior of the structure function of the many fermion systems at the zero momentum transfer and a new definition for this function

Yahya Younesizadeh[1,2]

[1]Department of Physics,South Tehran Branch, Islamic Azad University,Tehran,Iran
[2]Department of Physics,Farhangian University,Tehran,Iran

First the structure function of the many fermion systems is written in terms of the fluctuation of the target density and the value of this function at the zero momentum transfer is calculated. It is shown that the value of the structure function of these systems at the zero momentum transfer calculated from two different methods which one is the mathematical straight method and other way is the sum rules of the quantum fluids, are not equal. This topic transparently is a paradox for the many-fermion systems and must be considered. Finally for removing this paradox, we offer a new definition for the response function or the structure function of the many fermion systems that is compatible with the experimental data.

***keywords**: the response function of the many-fermion systems, the structure function of the many fermion systems, the energy transfer, the momentum transfer, the density fluctuations*

مقدمه

هدف این مقاله این است که نشان دهیم مقدار تابع ساختار سیستم های چندفرمیونی در تکانه انتقالی صفر دارای ابهام است. همانطور که می‌دانیم یک سیستم فیزیکی در مقابل ذراتی که به سمت آن پرتاب می‌شود، پاسخ نشان خواهد داد.تابع پاسخ یک سیستم وابسته به کمیت‌هایی مانند تکانه و انرژی انتقالی است که ذره کاوشگر به سیستم می‌دهد. اگر این کمیت‌ها تغییر کنند، تابع پاسخ نیز تغییر خواهد کرد. در شرایط حدی از این دو کمیت، رفتار سیستم های چندفرمیونی جالب است زیرا از دو راه مختلف، دو جواب مختلف برای تابع پاسخ سیستم های چند فرمیونی حاصل میشود که یکی برحسب تابع توزیع تکانه و دیگری برحسب تابع طیفی می‌باشد که دارای مقادیرمختلف هستند[۱و۲]. اگر ما سهم همه انرژی‌های انتقالی را در نظر بگیریم یا از تابع پاسخ روی انرژی انتقالی انتگرال بگیریم، تابع جدیدی به دست می‌آید که تابع ساختار سیستم نام دارد و تنها وابسته به تکانه انتقالی است[۳]. تابع ساختار سیستم های چندفرمیونی در تکانه انتقالی صفر به سمت صفر میل میکند و در تکانه انتقالی به سمت بی-نهایت این تابع به سمت ۱ میل خواهد کرد. در این مقاله رفتار این تابع را در تکانه انتقالی نزدیک صفر بررسی میکنیم. ابتدا به یک رفتار دو گانه یا پارادوکس برای تابع ساختار در تکانه های خیلی کوچک خواهیم رسید و بعد سعی در برطرف کردن آن خواهیم داشت. ابهام در تابع ساختار سیستم های چند فرمیونی یکی از مسائل مهم در فیزیک هسته ای در حال حاضر است[۴].

تئوری

در این قسمت از دو روش استفاده میکنیم که روش اول راه ریاضی مستقیم برای محاسبه تابع ساختار است و راه دوم استفاده از قوانین حاکم بر مایعات کوانتومی برای محاسبه تابع ساختار سیستم های چندفرمیونی در تکانه انتقالی صفراست.

راه اول کاملا ریاضی است و راه دوم هم ریاضی است و هم فیزیکی.

ما ابتدا تابع پاسخ یک سیستم چندفرمیونی را می‌نویسیم:

$$S(q,\omega)=\frac{1}{N}\int \frac{dt}{2\pi}e^{i\omega t}<0\left|\rho_q^{\dagger}(t)\rho_q(0)\right|0> \qquad (۱)$$

در رابطه بالا،پارامترهای $|0>$، q،ω، N , و $\rho_q(t)$ به ترتیب برابر کت حالت پایه سیستم، انرژی انتقالی، تکانه انتقالی، تعدادذرات سیستم هدف و چگالی تعداد ذرات سیستم در زمان t که تکانه q را جذب کرده، هستند. در این مرحله تابع دقیق ρ_k رابابد تعریف کنیم[۱]:

$$\rho_{\boldsymbol{k}}=\sum_k a^{\dagger}_{\boldsymbol{k+q}}\,a_{\boldsymbol{k}} \qquad (۲)$$

که $a_k=a|k>$ است. با توجه به رابطه زیر:

$$a_k=a|k>=\sum_i a|x_i><x_i|k> \qquad (۳)$$

باتوجه به رابطه $<x_i|k>=e^{-i\boldsymbol{k}.\boldsymbol{x}_i}$ و ادغام رابطه (۳) در رابطه (۲) و استفاده از رابطه کاملیت، تابع $\rho_{\boldsymbol{k}}$ به صورت زیر حاصل میشود:

$$\rho_{\boldsymbol{k}}=\sum_i e^{i\boldsymbol{k}.\boldsymbol{x}_i} \qquad (۴)$$

حالا با انتگرالگیری روی تابع (۱) نسبت به ω ، تابع ساختار سیستم بدست می‌آید که به صورت زیر است:

$$S(q) = \int d\omega S(q,\omega) = \frac{1}{N}\int_0^\infty \frac{dt}{2\pi}\int d\omega e^{i\omega t} < 0\left|\rho_q^\dagger(t)\rho_q(0)\right|0 > \quad (۵)$$

بنابراین ما خواهیم داشت:

$$S(q) = \frac{1}{N}\int_0^\infty \frac{dt}{2\pi}\delta(t) < 0\left|\rho_q^\dagger(t)\rho_q(0)\right|0 > = \frac{1}{N} < 0\left|\rho_q^\dagger(0)\rho_q(0)\right|0 > \quad (۶)$$

عاقبت S(q) به صورت زیر می‌باشد:

$$S(q) = \frac{1}{N} < 0\left|\rho_q^\dagger\rho_q\right|0 > \quad (۷)$$

حال اگر ما به رابطه بالا توجه کنیم، متوجه می‌شویم که تابع ساختار در تکانه انتقالی صفر بی‌معنی نیست زیرا در معادله بالا، سیستم در حالت پایه بعد از چندین فرآیند، دوباره به حالت پایه برمیگردد. یعنی با اعمال اپراتور $\rho_q^\dagger\rho_q$ روی حالت پایه، ما میخواهیم حساب کنیم که سیستم دوباره با چه احتمالی به این حالت برمیگردد. در این راه $q = 0$ میتواند یک حالت محتمل باشد چون در این تکانه ، سیستم پاسخی نخواهد داشت. پس ابتدا از روش مستقیم تابع $S(q)$ رادر تکانه انتقالی صفر بدست می‌آوریم:

$$S(0) = \frac{1}{N} < 0\left|\rho_0^\dagger\rho_0\right|0 > \quad (۸)$$

حال با توجه به رابطه $\rho_q = \sum_{i=1}^N e^{i\boldsymbol{q}.\boldsymbol{r}_i}$ [۱] می‌توان نوشت:$\rho_0 = N, \rho_0^\dagger = N$. پس از معادله (۸) داریم:

$$S(0) = \frac{1}{N} < 0|N.N|0 > = \frac{N^2}{N} < 0|0 > = N \quad (۹)$$

پس عاقبت داریم:

$$S(0) = N \quad (۱۰)$$

حالا می‌خواهیم در این مرحله مقدارتابع پاسخ در تکانه انتقالی صفر را از روش قانون جمع مایعات کوانتومی به دست آوریم[۵].
از معادله زیر شروع میکنیم:

$$\frac{\hbar^2k^2}{2m} = \frac{1}{2N} < 0\left|[\rho_k^\dagger,[H,\rho_q]]\right|0 > \quad (۱۱)$$

که H و m به ترتیب هامیلتونی سیستم هدف و جرم ذرات سازنده هدف هستند. میتوان معادله بالا را به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\hbar^2k^2}{2m} = \frac{1}{N}\sum_n(E_n - E_0)\,| < 0|\rho_k|n > |^2 \quad (۱۲)$$

که بر حسب S(q,ω) ، معادله بالا نوشته می‌شود به صورت:

$$\frac{\hbar^2q^2}{2m} = \int_0^\infty \omega S(q,\omega)d\omega \quad (۱۳)$$

درمایعات کوانتومی، معادله دیگری به صورت زیر داریم[۴]:

$$\frac{1}{2mc^2} = \lim_{q\to 0}\int_0^\infty d\omega\,\frac{S(q,\omega)}{\omega} \quad (۱۴)$$

که c و m به ترتیب سرعت اولین صدا و جرم ذرات سازنده هدف هستند. روابط (۱۳) و (۱۴) یک محدودیت را بر رفتار تابع $S(q)$ در نزدیکی تکانه صفر تحمیل می‌کنند. روابط (۱۳) و (۱۴) در q نزدیک صفر تولید می‌کنند:

$$\left(\frac{\hbar q}{2mc}\right)^2 = \lim_{q\to 0}\frac{1}{2}\int_0^\infty\int_0^\infty d\omega\, d\omega'\left(\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega}\right)S(q,\omega')S(q,\omega)$$
$$= \lim_{q\to 0}\frac{1}{2}\int_0^\infty\int_0^\infty d\omega\, d\omega'\left(1 + \frac{(\omega-\omega')^2}{2\omega'\omega}\right)S(q,\omega')S(q,\omega) \quad (۱۵)$$

از معادله بالا ما نتیجه فوری زیر را خواهیم داشت:

$$\lim_{q\to 0}\frac{S(q)}{q}\leq\frac{\hbar}{2mc} \qquad (۱۶)$$

یعنی در قوانین جمع مایعات کوانتومی، نسبت $\frac{S(q)}{q}$ معادل با یک مقدار ثابت کوچک است. بنابراین در مایعات کوانتومی در تکانه انتقالی صفر، تابع $S(q)$ باید صفر باشد تا این نسبت مبهم شود و ما بتوانیم این ابهام را برطرف کنیم تا نسبت فوق به سمت یک مقدار ثابت محدود میل کند. پس در مایعات کوانتومی داریم:

$$S(0)=0 \qquad (۱۷)$$

نتیجه گیری و بحث

حال اگر ما معادلات (۱۰) و (۱۷) را با هم مقایسه کنیم، یقینا به یک پارادوکس خواهیم رسید زیرا از دو راه مختلف، دو نتیجه مختلف را بدست آورده ایم. از این رو ما باید این پارادوکس را بررسی کنیم و سعی کنیم آن را برطرف کنیم. یکی از نقطه نظرات بررسی، مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع ساختار سیستم چندفرمیونی است. در مایعات کوانتومی در تکانه انتقالی صفر، مقدار تابع ساختار برابر صفر است و مقدار آن در تکانه انتقالی بی نهایت برابر یک می‌باشد[۴]. حال می‌خواهیم مقدار ماکزیمم و مینیمم این تابع را از رابطه(۴) به دست آوریم.

مفهوم تابع $\rho_q^\dagger\rho_q$ در این معادله، نوسانات دانسیته ذرات است. با قرار دادن مقدار ρ_q از رابطه $\rho_q=\sum_{i=1}^{N}e^{iq.r_i}$ ، تابع $\rho_q^\dagger\rho_q$ از صفر تا N^2 تغییر میکند. با قرار دادن این مقادیر در رابطه (۱۰) ، تابع ساختار از صفر تا N تغییر خواهد کرد. یعنی مقدار ماکزیمم تابع ساختار برابر N است که برابر مقدار ماکزیمم به دست آمده در رفرنس[۴] یعنی مقدار یک، نیست. این موضوع همان پارادوکسی است که در این مقاله به دست آمده است. در این مرحله دو احتمال وجود دارد: یا یکی از جوابها اشتباه است یا در تکانه انتقالی صفر تابع ساختار دارای ناپیوستگی است. ما اولین احتمال را که شاید پارادوکس ایجاد شده به دلیل تعریف ناقص تابع پاسخ ایجاد شده باشد، را بررسی می‌کنیم.

معادله (۱۰) برای تابع ساختارسیستم های چندفرمیونی در تکانه انتقالی صحیح نیست زیرا اگر تعداد ذرات سیستم خیلی زیاد باشد، آنگاه این مقدار به بینهایت می‌رود و این بی‌معنی است.بنابراین این رابطه باید تصحیح شود. برای اینکه این دو جواب یکسان باشند و ابهام برطرف شود، باید از دو راه مختلف برای $S(0)$ جواب صفر به دست آوریم. بنابراین ما پیشنهاد می‌دهیم که تابع پاسخ سیستم به صورت زیر نوشته شود تا این مشکل برطرف گردد:

$$S(q,\omega)=\frac{1}{N}\int\frac{dt}{2\pi}e^{i\omega t}<0\left|[\rho_q^\dagger(t),\rho_q(0)]\right|0> \qquad (۱۵)$$

این پیشنهاد از کم کردن مقدار $<0\left|\rho_q(0)\rho_q^\dagger(t)\right|0>$ از تابع پاسخ رابطه (۱) برای صفر کردن مقدار N در رابطه (۱۰) داده شده است.

مفهوم تابع پاسخ همراه عبارت $<0\left|\rho_q^\dagger(t)\rho_q(0)\right|0>$ در رابطه (۱) این احتمال را اندازه گیری می‌کند که اگر در زمان $t=0$ به یک ذره تکانه q داده شود، آنگاه بعد از گذشت زمان t ، سیستم با پس دادن تکانه $-q$ ، به حالت پایه برگردد.

اما مفهوم تابع پاسخ همراه عبارت $<0|\rho_q(0)\rho_q^\dagger(t)|0>$ که برابر $<0|\rho_q(0)\rho_{-q}(-t)|0>$ است این احتمال را اندازه می‌گیرد که اگر در زمان $-t$ تکانه $-q$ از سیستم گرفته شود، آنگاه بعد از زمان t با دادن تکانه q به سیستم به حالت پایه برگردد. این جمله در واقع تقارن زمان را در رابطه پاسخ یک سیستم نشان می‌دهد که یک اصل است.

در این حالت تابع ساختار به صورت زیر بدست می‌آید:

$$S(q) = \frac{1}{N} < 0\left|[\rho_q^\dagger, \rho_q]\right|0 > \qquad (۱۶)$$

که در این حالت از روش مستقیم، $S(0)$ برابر صفر می‌شود و ابهام برطرف می‌شود. در رابطه بالا تابع ρ_q یک عملگر است و جابجایی آن با $\rho_q^\dagger$ برابر صفر نیست زیرا این توابع وابسته به عملگرهای تکانه q و مکان r هستند که با هم جابجا نمی‌شوند.

حال میخواهیم اثر $\rho_q\rho_q^\dagger$ را روی کت $|0>$ بررسی کنیم. از رابطه (۲) خواهیم داشت:

$$\rho_q^\dagger = \sum_k a_{\boldsymbol{k}}^\dagger a_{\boldsymbol{k+q}} \qquad (۱۷)$$

که عبارت بالا یعنی $\rho_q\rho_q^\dagger$ به صورت زیر است:

$$\rho_q\rho_q^\dagger = \sum_k a_{\boldsymbol{k+q}}^\dagger a_{\boldsymbol{k}} \sum_{k'} a_{\boldsymbol{k'}}^\dagger a_{\boldsymbol{k'+q}} = \sum_{k,k'} a_{\boldsymbol{k+q}}^\dagger a_{\boldsymbol{k}} a_{\boldsymbol{k'}}^\dagger a_{\boldsymbol{k'+q}} \qquad (۱۸)$$

رابطه بالا وقتی غیر صفر است که یا $k' = k' + q$ و $k = k + q$ که $q = 0$ که مورد نظر نیست یا $k + q = k' + q$ که باید $k = k'$. بنابراین رابطه بالا به صورت زیر ساده میشود:

$$\rho_q\rho_q^\dagger = \sum_{k,k'} \delta_{k,k'} a_{\boldsymbol{k+q}}^\dagger a_{\boldsymbol{k}} a_{\boldsymbol{k'}}^\dagger a_{\boldsymbol{k'+q}} \qquad (۱۹)$$

حالا اگر مقدار انتظاری عبارت بالا را بگیریم نسبت به حالت پایه، خواهیم داشت از رابطه بالا:

$$< 0|\rho_q\rho_q^\dagger|0 >=< 0|\sum_k a_{\boldsymbol{k+q}}^\dagger a_{\boldsymbol{k}} a_{\boldsymbol{k}}^\dagger a_{\boldsymbol{k+q}}|0 > \qquad (۲۰)$$

با توجه به پادجابجایی های $\{a_k^\dagger, a_{k'}\} = \delta_{k,k'}$ و $\{a_k, a_{k'}\} = 0$ خواهیم داشت از رابطه بالا:

$$< 0|\rho_q\rho_q^\dagger|0 >=< 0|\sum_k a_{\boldsymbol{k+q}}^\dagger a_{\boldsymbol{k+q}}(1 - a_{\boldsymbol{k}}^\dagger a_{\boldsymbol{k}})\ |0 > \qquad (۲۱)$$

که به صورت زیر ساده شود:

$$< 0|\rho_q\rho_q^\dagger|0 >=< 0|\sum_k a_{\boldsymbol{k+q}}^\dagger a_{\boldsymbol{k+q}}\ |0 > -< 0|\sum_k a_{\boldsymbol{k+q}}^\dagger a_{\boldsymbol{k+q}} a_{\boldsymbol{k}}^\dagger a_{\boldsymbol{k}})\ |0 > \qquad (۲۲)$$

که به صورت زیر بر حسب عملگر تعداد $\hat{n}(k) = a_{\boldsymbol{k}}^\dagger a_{\boldsymbol{k}}$ نوشته میشود:

$$< 0|\rho_q\rho_q^\dagger|0 >=< 0|\sum_k \hat{n}_{k+q}\ |0 > -< 0|\sum_k \hat{n}_{k+q}\hat{n}_k\ \ )\ |0 >= N - \sum_k n(k+q)n(k) \qquad (۲۳)$$

که توابع $n(k)$ تابع توزیع تکانه سیستم است.بنابراین اعمال $\rho_q\rho_q^\dagger$ روی کت $|0>$ مانند اعمال $\rho_q^\dagger\rho_q$ روی همین کت است.

از این رو ما دو رفتار مختلف را برای تابع ساختار سیستم های چند فرمیونی در تکانه انتقالی صفر به دست آوردیم. برای رفع این ابهام تابع پاسخ سیستم چندفرمیونی را اصلاح کردیم و ابهام را برطرف کردیم. بنابراین ما به یک تعریف جدید و کامل از تابع پاسخ برای سیستم های چندفرمیونی رسیدیم که با تجربه همخوانی دارد.

مرجع‌ها

[1]- O. Benhar,A. Fabrocini and S. Fantoni, Phys.Rev.Lett., 87, (2001) 052501-4.

[2]- M. Modarres and Y. Younesizadeh, Nucl.Phys.A, 789, (2007), 82-93.

[3]-J. J. Sakurai, Modern Quantum Mechanics, chap.7, 1994.

[4]-M. Modarres and Y. Younesizadeh, Int. J. Theor. Phys. **49**, (2010), 413.

[5]- E. Feenberg, Theory of Quantum Fluids, Academic Press, New York, chap.1, (1969).