استفاده از روش گسسته‌سازی مستقیم برای حل معادله‌ی ترابرد یک بعدی پایا به همراه بررسی حساسیت پاسخ نهایی به درجه‌ی روش SN و شبکه‌بندی

ترابی میرزایی، احسان – وثوقی، ناصر

دانشگاه صنعتی شریف ، دانشکده مهندسی انرژی ، گروه مهندسی هسته‌ای

چکیده:

در این مقاله از روش گسسته‌سازی مستقیم برای حل معادله‌ی ترابرد یک‌بعدی پایا استفاده شده است. علاوه‌براین روش گسسته‌سازی زاویه‌ی فضایی S_N نیز مورد استفاده قرار گرفته است. برای راستی‌آزمایی روش به کاربرده‌شده، از دو مسئله‌ی مرجع متفاوت بهره برده و حساسیت پاسخ نهایی به درجه‌ی روش S_N و همچنین تعداد نقاط شبکه‌بندی اولیه سنجیده شده است. سرانجام، نتایج بدست‌آمده تطابق کاملی با مسائل مرجع داشته و کارآمدی روش حل را نمایان می‌سازد.

کلمات کلیدی: *روش‌گسسته‌سازی مستقیم، معادله ترابرد نوترون، روش گسسته‌سازی زاویه فضایی S_N شبکه‌بندی اولیه و ثانویه، حساسیت پاسخ نهایی.*

Application of Direct Discrete Method for solving the one-dimensional & time-independent transport equation with investigating the sensitivity of the final result to the S_N method and the number of primal meshes

Torabi Mirzaei, Ehsan; Vosoughi, Naser

Sharif University of Technology, Department of Energy Engineering

Abstract:

In this paper, the direct discrete method is used to solve the one-dimensional & time-independent transport equation. In addition, the S_N discrete ordinates method is also used. two different reference problems are used for verification and the sensitivity of the final response to the S_N method and the number of primal meshes is measured. Finally, the results obtained are in perfect agreement with the reference problems and illustrate the efficiency of the solution method.

Keywords: Direct Discrete Method, Neutron transport equation, SN discrete ordinates method, Primal & Dual meshing, Sensitivity of the final result.

مقدمه:

یکی از روش‌های عددی که سعی کرده است ویژگی‌های مثبت دو روش اجزای محدود[۱] و تفاضل محدود[۲] را در خود جمع کند و در عین حال از روابط پیچیده و تقریب‌های دیفرانسیلی استفاده نکند، روش گسسته سازی مستقیم[۳] است. این روش که اولین‌بار برای حل معادلات میدان مغناطیسی مورد استفاده قرار گرفت، در برخی جنبه‌های دیگر نیز دارای مزیت‌های نسبی می‌باشد. به عنوان نمونه به‌کارگیری این روش در معادله‌ی پخش[٤] منجر به بهبود مرتبه‌ی همگرایی تا درجه ٤ شده است. این در حالی است که این پارامتر برای روش تفاضل محدود ۲ و برای روش اجزای محدود ۲,۵ است. [1]

در روش گسسته‌سازی مستقیم، شروع کار تقسیم‌بندی هندسه به دو مجموعه شبکه‌بندی متفاوت اولیه[٥] و ثانویه[٦] است. به طور مختصر، شبکه‌بندی ثانویه منجر به تولید یک حجم کنترل[۷] برای متغیرهای حالت که در شبکه‌بندی اولیه قابل تعریف هستند، می‌شود. پس از آن بر اساس قاعده‌ی مشخصی، به کمیت‌های فیزیکی موجود در مسئله یک جهت‌گیری نسبت داده می‌شود (داخلی یا خارجی). در نهایت مشخص می‌شود که متغیرهای حالت در نقاط شبکه‌بندی اولیه و با جهت‌گیری داخلی[۸] درنظر گرفته خواهند شد. سپس با تعریف یک تابع درون‌یاب برای کمیت مجهول، فرم گسسته‌ی عملگرهای ریاضی و فرم گسسته‌ی معادلات مورد نظر تولید خواهد شد.

---

[۱] Finite element

[۲] Finite difference

[۳] Direct Discrete Method

[٤] Diffusion Equation

[٥] Primal Cell

[٦] Dual Cell

[۷] Control Volume

[۸] Inner Orientation

در نتیجه در این پژوهش از روش گسسته‌سازی مستقیم برای حل معادله‌ی ترابرد یک‌بعدی پایا استفاده شده است. همچنین لازم به ذکر است که برای گسسته‌سازی زاویه‌ی فضایی نیز، روش گسسته‌سازی S_N مورد استفاده قرار گرفته است.

فرم یک بعدی معادله‌ی ترابرد با فرض تقسیم‌بندی انرژی نوترون به GG گروه گسسته و گسسته‌سازی زاویه فضایی طبق روش S_N به MM جهت با وزن‌های مختلف ω_m، به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}&\mu_m \frac{\partial}{\partial x}\phi_{1g}^{m}(x)+\Sigma_{t_g}(x)\phi_{1g}^{m}(x)=\frac{1}{2}Q_g(x)\\&+\sum_{m'=1}^{MM}\sum_{g'=1}^{GG}\frac{\omega_{m'}}{2}\{\chi_g(x)\nu_{g'}(x)\Sigma_{f_{g'}}(x)+\Sigma_{s_0}{}^{g'g}(x)+3\Sigma_{s_1}{}^{g'g}(x)\mu\mu'\}\phi_{1g'}^{m'}(x)\end{aligned} \quad (۱)$$

بر اساس اصول روش گسسته‌سازی مستقیم و به دلیل یک‌بعدی‌بودن مسئله، معادله‌ی تراز باید برای خطوط شبکه‌بندی ثانویه نوشته شود. توجه به این نکته حایز اهمیت است که با عملگرهای مشتق و انتگرال در معادله‌ی (۱) نباید به صورت تعریف حدی آنان برخورد شود؛ بلکه در ادامه با توجه به درون‌یاب انتخاب شده، این عملگرها به ترکیبات خطی از شار روی مش‌ها تبدیل می‌شوند. برای هر یک از خطوط شبکه‌بندی اولیه مقدار $\phi_1(x)$ به صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$\phi_1(x)=gx+b \quad (۲)$$

با فرض معلوم بودن شار در نقاط شبکه‌بندی اولیه، ثوابت تابع درون‌یاب به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} g \\ b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_i & 1 \\ x_{i+1} & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \phi_1^{i} \\ \phi_1^{i+1} \end{bmatrix} \quad (۳)$$

بنابراین، فرم گسسته‌ی عملگر گرادیان و همچنین فرم گسسته عملگر انتگرال برابر است با:

$$\nabla=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_i & 1 \\ x_{i+1} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \quad (٤)$$

$$\int_{x_a}^{x_b}\phi_1(x)dx=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(x_b{}^2-x_a{}^2) & (x_b-x_a) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_i & 1 \\ x_{i+1} & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \phi_1^{i} \\ \phi_1^{i+1} \end{bmatrix},\ (x_a,x_b)\in(x_i,x_{i+1}) \quad (٥)$$

با تعریف فرم گسسته‌ی عملگرهای انتگرال و گرادیان، می‌توان به حل معادله ترابرد پرداخت. برای این منظور ابتدا از معادله‌ی (۱) بر روی نقاط شبکه‌بندی اولیه، حول خطوط شبکه‌بندی ثانویه‌ی اطرافش انتگرال گرفته می‌شود؛ بدین ترتیب معادله‌ی تراز برای هر خط شبکه‌بندی ثانویه نوشته می‌شود. پس از آن با اعمال شرایط مرزی برای حل معادلات گسسته‌شده، یک کد کامپیوتری نوشته شده و از آن استفاده می‌شود.

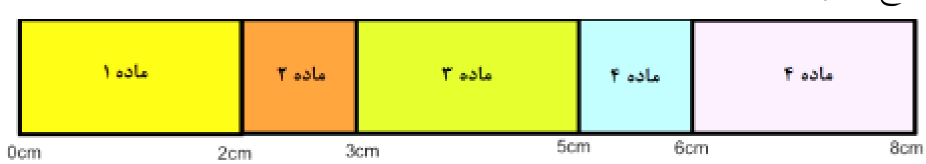
نتایج:

در ادامه دو مسئله‌ی نمونه در زمینه‌ی ترابرد یک‌بعدی نوترون مورد بررسی قرار گرفته است. اولین مسئله، مسئله‌ی REED در هندسه‌ی تیغه‌ی یک بعدی است که برای آزمایش دقت و ثبات تفکیک مکانی کاربرد داشته و یکی از بهترین مسائل برای راستی‌آزمایی برنامه‌های ترابرد گسسته‌سازی‌شده به روش S_N می‌باشد. مشخصات مواد به‌کاررفته‌شده در این مسئله در جدول ۱ و هندسه‌ی آن در شکل ۱ آورده شده‌است. دو چشمه با قدرت‌های ۵۰,۰ و ۱,۰ (واحد دلخواه) به ترتیب در ناحیه‌ی اشغال‌شده توسط ماده‌ی ۱ و بازه‌ی $5.0cm < x < 6.0cm$ قرار دارند. شرط مرزی سمت راست، خلاء و شرط مرزی سمت چپ بازتابنده است. [2]

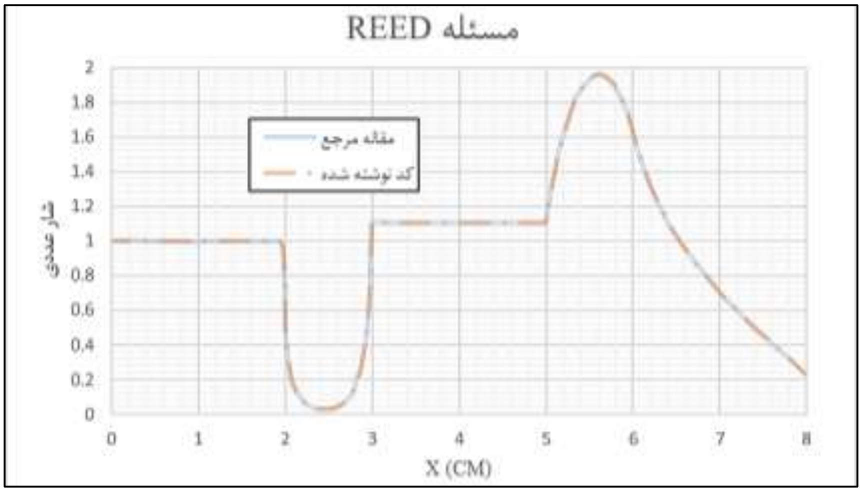
جدول ۱ خواص نوترونیک مواد به‌کاربرده‌شده در مسئله‌ی REED

	ماده ۱	ماده ۲	ماده ۳	ماده ٤
$\Sigma_a\,(cm^{-1})$	۵۰,۰	۵,۰	۰,۰	۰,۱
$\nu\Sigma_f\,(cm^{-1})$	۰,۰	۰,۰	۰,۰	۰,۰
$\Sigma_t\,(cm^{-1})$	۵۰,۰	۵,۰	۰,۰	۱,۰
$\Sigma_s\,(cm^{-1})$	۰,۰	۰,۰	۰,۰	۰,۹

با استفاده از تقریب S_8 برای گسسته‌سازی زاویه‌ی فضایی، نتیجه‌ی برنامه نوشته‌شده برای ۸۰۱ نقطه‌ی شبکه‌بندی اولیه به صورت شکل ۲ بدست آمد. در رایانه‌ای با پردازشگر Intel® Core™ i7-3610QM CPU @ 2.30 GHz، زمان لازم برای دستیابی به این پاسخ کمتر از ٦ ثانیه بود.



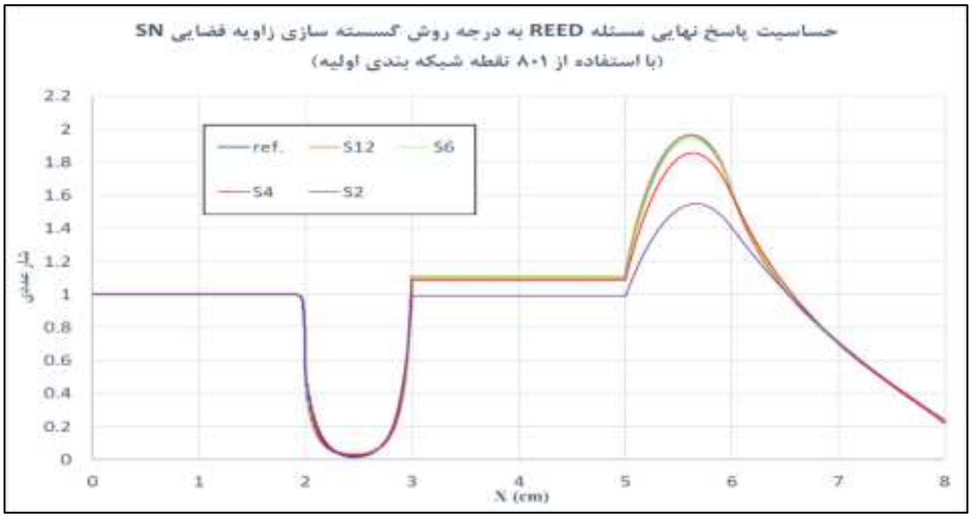
شکل ۱ هندسه‌ی شماتیک مربوط به مسئله‌ی REED



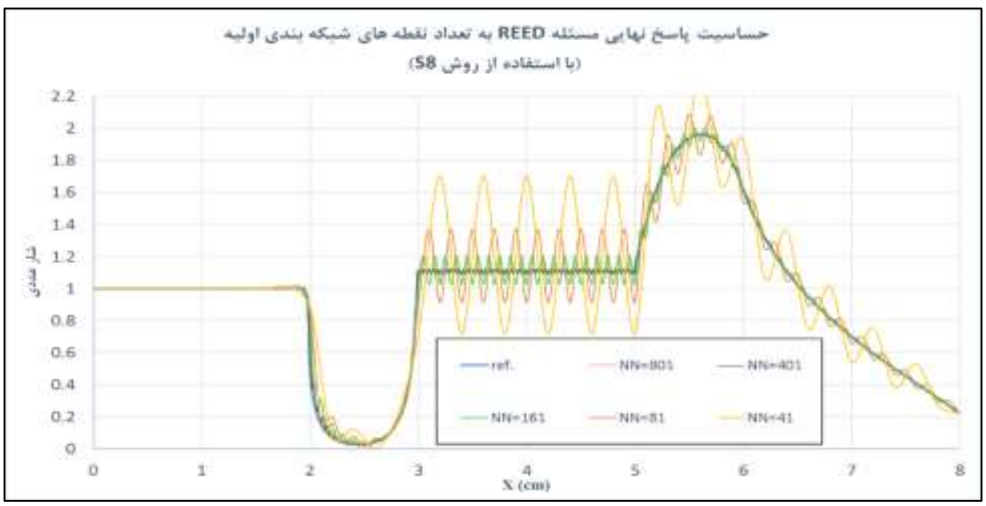
شکل ۲ مقایسه‌ی نتیجه‌ی بدست‌آمده از برنامه نوشته‌شده و مقدار گزارش‌شده در [3]

مشاهده می‌شود که داده‌های بدست‌آمده، با داده‌های مسئله‌ی مورد نظر دقیقا یکسان است. در مقاله‌ی مرجع از حل تحلیلی مسئله با به کارگیری برنامه‌ی میپل[1] به همراه روش گسسته‌سازی فضایی S_N با درجه‌ی ۸ استفاده شده‌است. [4] در ادامه حساسیت پاسخ بدست آمده از کد نوشته شده برای این مسئله، نسبت به درجه‌ی روش S_N و همچنین نسبت به تعداد نقاط شبکه‌بندی اولیه بررسی شده است.

[1] MAPLE

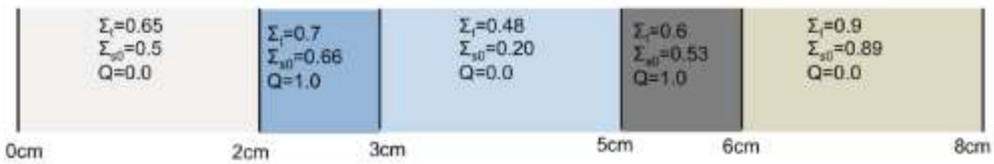


شکل ۳ بررسی حساسیت پاسخ نهایی مسئله REED به درجه روش گسسته‌سازی زاویه فضایی S_N



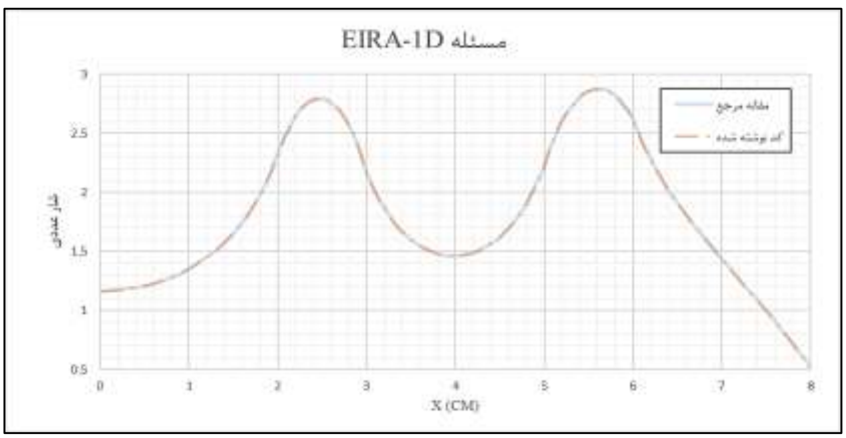
شکل ٤ بررسی حساسیت پاسخ نهایی مسئله REED به تعداد نقاط شبکه‌بندی اولیه

مسئله‌ی دوم EIRA-1D است که هندسه و شرایط مرزی آن همانند مسئله‌ی REED می‌باشد؛ اما مشخصات مواد تشکیل‌دهنده‌ی هر ناحیه و همچنین چشمه‌های موجود در مسئله، متفاوت است. مشخصات مربوط به هر ناحیه از هندسه در شکل ۵ نشان داده شده‌است. [3]



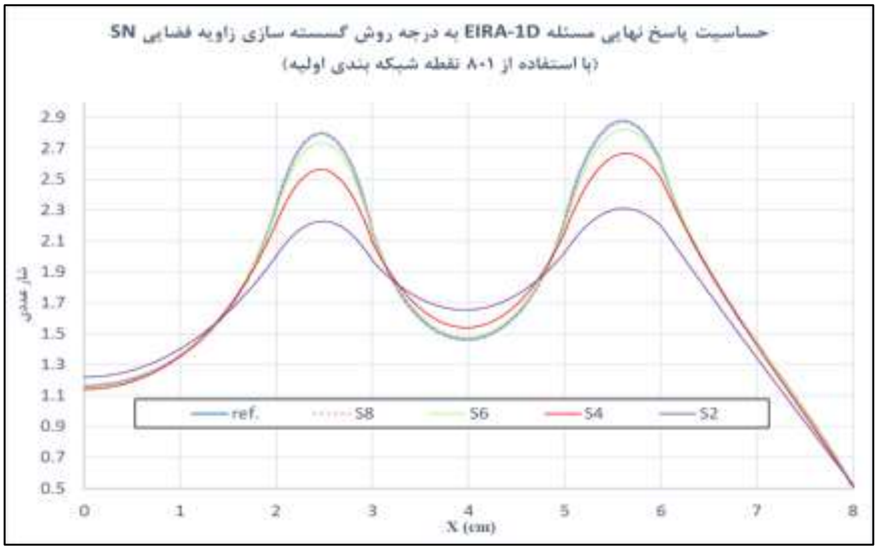
شکل ۵ هندسه‌ی نوعی و مشخصات نواحی مربوط به مسئله‌ی EIRA-1D [3]

در این مورد نیز پس از به‌کارگیری تقریب S_8 برای گسسته‌سازی زاویه‌ی فضایی، برای ۸۰۱ نقطه‌ی شبکه‌بندی اولیه نتیجه به صورت شکل ٦ بدست آمد و در رایانه‌ای با پردازشگر Intel® Core™ i7-3610QM CPU @ 2.30 GHz، زمان لازم برای دستیابی به این پاسخ نیز کمتر از ٦ ثانیه بود.

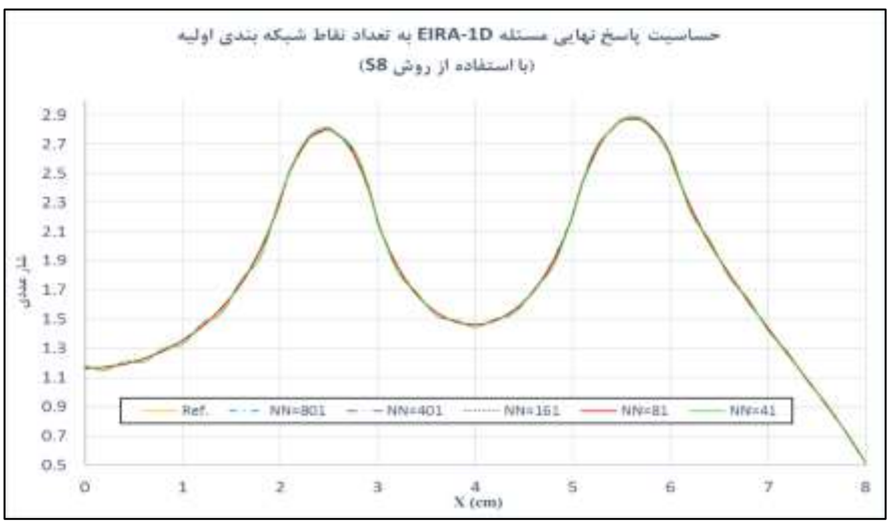


شکل ٦ مقایسه‌ی نتیجه‌ی بدست‌آمده از برنامه نوشته‌شده و مقدار گزارش‌شده در مرجع [3]

طبق شکل ٦ این‌بار هم نتیجه‌ی بدست‌آمده کاملا مطلوب و مورد تایید می‌باشد؛ که در مقاله‌ی مرجع از حل تحلیلی مسئله با استفاده از برنامه‌ی میپل و روش گسسته‌سازی فضایی S_8 استفاده شده است. [3] چنان‌چه برای حل معادله از ۸۰۱ نقطه‌ی شبکه‌بندی اولیه استفاده شود، حساسیت پاسخ نهایی مسئله‌ی EIRA-1D به درجه‌ی روش گسسته‌سازی زاویه‌ی فضایی S_N، به صورت شکل ۷ خواهد بود. علاوه بر این، در صورت به کارگیری روش S_8 به منظور گسسته‌سازی زاویه‌ی فضایی، حساسیت نسبت به تعداد نقاط شبکه‌بندی اولیه مطابق شکل ۸ خواهد بود.



شکل ۷ بررسی حساسیت پاسخ نهایی مسئله EIRA-1D به درجه روش گسسته‌سازی زاویه فضایی S_N



شکل ۸ بررسی حساسیت پاسخ نهایی مسئله EIRA-1D به تعداد نقاط شبکه‌بندی اولیه

بحث و نتیجه‌گیری:

از آن‌جایی که نتایج بدست‌آمده با مسائل مرجع تطابق کامل داشته و حساسیت‌سنجی‌های انجام‌شده نیز کاملا منطقی و قابل انتظار بوده است، کارآمدی و کارآیی روش حل به کاربرده شده (روش گسسته‌سازی مستقیم) امری مشهود و معتبر می‌باشد. لازم به ذکر است که یکی از مهمترین مزیت‌های اساسی روش گسسته‌سازی مستقیم نسبت به سایر روش‌های حل عددی، این مسئله است که ضمن ثابت نگه‌داشتن شبکه‌بندی اولیه (تعداد و موقعیت مکانی نقاط مجهول)، به واسطه‌ی تغییر شبکه‌بندی ثانویه می‌توان نتیجه‌ی نهایی را تغییر داد. علاوه بر این قبلا ذکر شد که عدم استفاده از روابط پیچیده‌ی دیفرانسیلی-انتگرالی و همچنین بالا بودن مرتبه‌ی همگرایی این روش نیز، از دیگر مزایای روش مذکور است.

مراجع:

[1] م. غفاری, مطالعه روش گسسته سازی مستقیم در حل معادله ترابرد نوترون, تهران : دانشکده مهندسی انرژی- دانشگاه صنعتی شریف, ۱۳۹۲.

[2] W. H. Reed, "New Difference Schemes for the Neutron Transport Equation," *Nuclear Science and Engineering*, vol. 46:2, pp. 309-314, 1971.

[3] J. Kophazi, M.D. Eaton, F. Fevotte, F. Hulsemann, J. Ragusa, R.S. Jeffers, "Goal-based h-adaptivity of the 1-D diamond difference discrete ordinate method," *Journal of Computational Physics*, vol. 335, no. 0021-9991, pp. 179-200, 2017.

[4] J. S. Warsa, "Analytical SN solutions in heterogeneous slabs using symbolic algebra computer programs," *Annals ofNuclear Energy*, vol. 29, pp. 851-874, 2002.