



## محاسبه مقدار توان اصطکاکی در رژیم های کاملاً مولکولی و گذرای فضای بین روتور و بدنه یک ماشین سانتریفیوژ با استفاده از روش های تحلیلی

یوسفی نسب، صادق<sup>۱\*</sup> - صفدری، سید جابر<sup>۱</sup> - کریمی ثابت، جواد<sup>۱</sup> - نوروزی، علی<sup>۲</sup> - امینی، الهام<sup>۲</sup> - خواجه نوری، مسعود<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> سازمان انرژی اتمی ایران، پژوهشگاه علوم و فنون هسته‌ای، پژوهشکده مواد و سوخت هسته‌ای

<sup>۲</sup> سازمان انرژی اتمی ایران، شرکت فناوری های پیشرفته ایران

### چکیده

توانی که در اثر حضور گاز در ماشین سانتریفیوژ مصرف می‌شود نقش مهمی در تعیین توان مورد نیاز برای موتور آن دارد. این توان تنها در دور نامی و در زمان گازدهی ماشین مطرح می‌باشد. توان مصرفی گاز درون ماشین را می‌توان از حاصل جمع توان مصرفی در فضای درون روتور و فضای بین روتور و بدنه به دست آورد. در این مقاله سعی بر آن گردیده است که با استفاده از روش‌های تحلیلی، مقدار توان اصطکاکی ناشی از گاز در رژیم‌های جریان کاملاً مولکولی و گذرا در فضای بین روتور و بدنه یک ماشین سانتریفیوژ فرضی محاسبه گردد. با مقایسه نتایج با مقدار توان اصطکاکی محاسبه شده از روش‌های مولکولی، یک روش قابل اعتماد جهت محاسبه مقدار توان اصطکاکی در رژیم‌های جریان کاملاً مولکولی و گذرا از بین روش‌های تحلیلی انتخاب می‌گردد.

**کلمات کلیدی:** توان اصطکاکی، رژیم جریان کاملاً مولکولی، رژیم جریان گذرا، روش‌های تحلیلی، روش مولکولی

## Calculation of frictional power in a free molecular and transition flow regime at the space between the rotor and casing of a centrifuge machine using analytical methods

Yousefi nasab, Sadegh<sup>1\*</sup>; Safdari, Seyed jabber<sup>1</sup>; Karimi sabet, Javad<sup>1</sup>; Norouzi, Ali<sup>2</sup>; Amini, Elham<sup>2</sup>; Khajenouri, Masoud<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Atomic Energy Organization of Iran, Nuclear Science and Technology Research Institute, Material and Nuclear Fuel Research School

<sup>2</sup> Atomic Energy Organization of Iran, Iran Advanced Technologies Company

### Abstract

A flow regime in different subsystems of a centrifuge machine effects on the overall friction power. The power that is consumed by the presence of gas in a centrifuge machine is only mentioned in the nominal velocity. The friction power of gas inside the machine can be obtained from the sum of the power in the space between the rotor and casing and the space inside the rotor. In this paper, it has been tried to calculate the amount of frictional power used in a fully molecular and transient flow regime in the rotor and the casing of a hypothetical centrifuge machine using analytical methods and then, considering the frictional power of molecular methods, a method for calculating fractional power in a completely molecular and transient flow regime with analytical methods is selected.



**Keywords:** Frictional power, Free molecular flow regime, Transition flow regime, Analytical methods, Molecular method

## مقدمه

همانگونه که گاز داخل یک ماشین سانتریفیوژ باعث تولید توان اصطکاکی برای ماشین سانتریفیوژ می‌گردد، ذرات گازی واقع شده در فضای بین روتور و بدنه نیز می‌توانند باعث ایجاد توان اصطکاکی برای یک ماشین سانتریفیوژ گردند. در واقع در فضای بین روتور و بدنه، فشار گاز بسیار پایین می‌باشد به گونه‌ای که فضای زیر پمپ مولکولار یک ناحیه کاملاً مولکولی را تشکیل می‌دهد. با وجود اینکه تعداد مولکول‌های قرار گرفته در ناحیه کاملاً مولکولی نسبت به یک فشار استاندارد بسیار کمتر می‌باشد (حدود  $10^{17}$  مولکول در واحد حجم مکعب)، ولی به دلیل برخورد مستقیم مولکول‌های گازی با سطوح منحنی شکل با سرعت چرخشی بسیار بالا، نیروی برشی که ذرات به سطوح اعمال می‌کنند باعث ایجاد یک توان اصطکاکی به نسبت چشم‌گیری برای آن ناحیه می‌گردد. از آنجایی که در رژیم‌های کاملاً مولکولی، ویسکوزیته هوا تحت تأثیر فشار و دما قرار می‌گیرد، مینهانگ بانو<sup>۱</sup> رابطه ضریب ویسکوزیته مؤثر<sup>۲</sup> را جهت محاسبه مقدار تنش برشی مورد استفاده در توان اصطکاکی بیان کرد [۱]. ساراف<sup>۳</sup> نیز یک رابطه اصلاح شده و ساده شده برای کدنویسی با انطباق منحنی برای ویسکوزیته مؤثر ارائه کرد [۲]. سرسیگنانی<sup>۴</sup> نیز رابطه‌ای را بر اساس نسبت تنش برشی در فضای مورد بررسی به تنش برشی در عدد ناسن بی‌نهایت بر اساس ضرایب ثابتی از عدد ناسن بیان کرد [۳]. باهوکودامبی<sup>۵</sup> نیز در مقاله خود دو رابطه برای محاسبه مقدار تنش برشی در رژیم جریان کاملاً مولکولی و برای یک جریان کویت ارائه کرد [۴]. ویجولا<sup>۶</sup> نیز در مقاله خود رابطه‌ای را برای تغییرات ویسکوزیته دینامیکی به صورت تابعی از عدد ناسن بیان کرد. همچنین رابطه‌ای را نیز برای محاسبه تنش برشی بر اساس عدد ناسن بیان کرد. این رابطه بیشتر برای رژیم جریان لغزشی مورد استفاده قرار می‌گیرد ولی برای رژیم جریان کاملاً مولکولی نیز با مقداری خطا قابل استفاده می‌باشد [۵]. سون و همکارانش نیز یک حل عددی برای تنش برشی در تمامی رژیم‌های مربوط به عدد ناسن به دست آوردند [۶]. در این مقاله بر اساس روابط تحلیلی بیان شده در هر یک از مقالات مذکور، مقدار توان اصطکاکی برای فضای بین روتور و بدنه یک ماشین سانتریفیوژ

<sup>۱</sup> Minhang bao

<sup>۲</sup> Coefficient of effective viscosity

<sup>۳</sup> Saraf

<sup>۴</sup> Cercignani

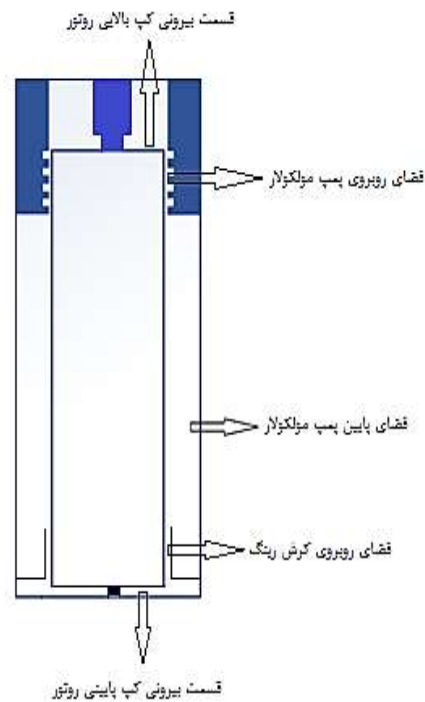
<sup>۵</sup> Bahukudumbi

<sup>۶</sup> Veijola

فرضی برای گاز هوا محاسبه شده و در انتها بر اساس مقدار توان اصطکاکی به دست آمده از روش مولکولی (DSMC) یکی از توان‌های اصطکاکی انتخاب گردیده است.

### تئوری

به طور کلی توان مصرفی در فضای بین روتور و بدنه، شامل توان اتلافی در قسمت‌های فضای بیرونی کپ بالایی روتور، فضای روبروی پمپ مولکولار و فضای پایین پمپ مولکولار (شامل فضای روبروی کرش رینگ و فضای بیرونی کپ پایینی روتور) می‌باشد. (شکل ۱)



شکل ۱: شماتیکی از نواحی ایجاد توان اصطکاکی در فضای بین روتور و بدنه

از آنجایی که در رژیم‌های کاملاً مولکولی، ویسکوزیته هوا تحت تاثیر فشار و دما قرار می‌گیرد در نتیجه در ناحیه پایین پمپ مولکولار از رابطه ضریب ویسکوزیته مؤثر استفاده شده است. در این رابطه ویسکوزیته به عدد ناسن



وابسته می‌باشد. مینهانگ بائو رابطه‌ای را برای ضریب ویسکوزیته مؤثر به صورت رابطه (۱) بیان کرد که در این رابطه ضریب ویسکوزیته مؤثر با محدوده گسترده‌ای از عدد نادسن قابل محاسبه می‌باشد [۱].

$$\mu_{eff} = \mu_0 \left( \frac{1}{1 + \sqrt{47.109 \times kn^{(1-0.0094)}}} \right), \quad kn = \frac{k_B T}{\sqrt{2} \pi P d^2 L} \quad (1)$$

در روابط مذکور،  $L$  فاصله بین روتور و بدنه،  $d$  قطر مولکول هوا،  $k_B$  ثابت بولتزمن و  $P$  کمیت فشار می‌باشد. با محاسبه عدد نادسن و ویسکوزیته هوا در فشار اتمسفر ( $\mu_0 = 1.7894 \times 10^{-5} J/k$ )، مقدار ویسکوزیته مؤثر با رابطه (۱) تعیین می‌گردد.

برای پیاده‌سازی عملی در برنامه نویسی‌های کامپیوتری، یک رابطه اصلاح شده و ساده شده از ویسکوزیته مؤثر در زیر بیان گردیده است. ساراف رابطه زیر را به وسیله تطبیق منحنی برای ویسکوزیته مؤثر بیان کرد [۲]:

$$\eta_{eff,m} = \frac{\eta}{1 + 2K_n + 0.2K_n^{0.788} e^{-K_n/10}} \quad (2)$$

ماکزیم خطای نسبی برای این تقریب در هر مقداری از  $K_n$  کمتر از  $\pm 0.6\%$  می‌باشد. روش دیگری نیز توسط سرسیگناتی [۳] ارائه گردیده که بر اساس نسبت تنش برشی در فشار مورد نظر به تنش برشی در فشار کاملاً مولکولی است. سرسیگناتی نسبت تنش برشی  $\tau_{xy}$  به  $\tau_{xy}^\infty$  را برای دو صفحه موازی یکدیگر که یکی از صفحات ثابت و دیگری با سرعت ثابت  $U$  در حال حرکت باشد به صورت زیر ارائه کرد:

$$\pi_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{\tau_{xy}^\infty} = -\frac{a_1 K_n^2 + a_2 K_n}{a_1 K_n^2 + a_3 K_n + a_4} \quad a_1 = 1.3056, a_2 = 2\pi, a_3 = 7.5939, a_4 = \pi \quad (3)$$

در رژیم جریان کاملاً مولکولی تنش برشی متناسب با دانسیته و سرعت نسبی صفحات می‌باشد. در نتیجه برای جریان کویت مذکور، مقدار تنش برشی در یک رژیم کاملاً مولکولی به صورت زیر قابل بیان می‌باشد:

$$\tau_{xy}^\infty = -\rho_0 U \sqrt{\frac{2RT_w}{\pi}} \quad (4)$$

باهوکودامبی [۴] یک رابطه‌ای را مشابه با رابطه بیان شده توسط سرسیگناتی بیان کردند که به صورت زیر می‌باشد:

$$\pi_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{\tau_{xy}^\infty} = -\frac{aK_n^2 + 2bK_n}{aK_n^2 + cK_n + b} \quad a = 0.52969, b = 0.602985, c = 1.627666 \quad (5)$$

که ضرایب  $a$ ،  $b$  و  $c$  از منطبق کردن آخرین درجه مربعات حل معادله بولتزمن خطی شده به دست آمده‌اند. ویجولا و تورووسکی [۵] یک مدل را برای تغییرات ویسکوزیته دینامیکی به صورت یک تابعی از عدد نادسن بیان کردند. این رابطه بیشتر برای رژیم جریانی لغزشی مورد استفاده قرار می‌گیرد. همچنین یک مدل تجربی توسط آن‌ها توسعه



پیدا کرد که از انطباق منحنی به دست آمده از حل خطی معادله بولتزمن حاصل گردیده است. این رابطه نسبت تنش برشی در هر رژیم جریانی به تنش برشی در رژیم کاملاً مولکولی را به صورت زیر بیان می‌کند:

$$\pi_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{\tau_{xy}^{\infty}} = - \frac{2Kn}{1 + 2Kn + 0.2Kn^{0.788}e^{-0.1Kn}} \quad (6)$$

سون و همکارانش [۶] یک حل عددی برای تنش برشی در تمامی رژیم‌های مربوط به عدد نادسن به دست آوردند. رابطه بیان شده توسط آن‌ها نیز به صورت زیر می‌باشد:

$$\pi_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{\tau_{xy}^{\infty}} = - \frac{Y_1 \pi Kn}{2(1 + 2\alpha Kn)}, \quad Y_1 = 1.270042, \quad \alpha = 1.111 \quad (7)$$

با استفاده از یک شبیه‌سازی مولکولی با روش DSMC، مقدار توان اصطکاکی در یک رژیم کاملاً مولکولی نیز با استفاده از رابطه زیر قابل محاسبه می‌باشد [۷]:

$$\tau_i = mn_U U (2RT_U / \pi)^{1/2} \quad (8)$$

که در رابطه بالا  $m$  جرم مولکول،  $n_U$  دانسیته عددی دیواره در حال حرکت و  $U$  سرعت خطی دیواره در حال حرکت می‌باشد. با محاسبه مقدار تنش برشی در هر محدوده فشاری مورد نظر، می‌توان مقدار نیروی برشی اعمال شده توسط مولکول‌های گاز با سطوح چرخان را با حاصلضرب مقدار تنش برشی به دست آمده در سطح مقطع سطوح تعیین کرد. به عبارتی دیگر پس از محاسبه مقدار  $\tau_{xy}$  از هر روش، می‌توان مقدار نیروی مماسی بر هر سطح را با استفاده از رابطه زیر به دست آورد:

$$F_t = \tau_{xy} \times A \quad (9)$$

با داشتن مقدار نیروی برشی، می‌توان مقدار گشتاور اصطکاکی مولکول‌های گازی بر سطح مورد نظر را با حاصلضرب نیروی برشی به دست آمده در شعاع استوانه به دست آورد. در انتها نیز مقدار توان اصطکاکی با استفاده از حاصلضرب گشتاور اصطکاکی در سرعت زاویه‌ای استوانه چرخان محاسبه می‌شود.

## نتایج

برای قسمت زیر پمپ مولکولار با مشخصات مطابق با جدول (۱) برای سه محدوده فشاری، نتایج حاصل از روش‌های تحلیلی محاسبه مقدار توان اصطکاکی با نتایج حل مولکولی مطابق با جدول (۲) مورد مقایسه قرار می‌گیرند.

جدول ۱. پارامترهای هندسی و عملیاتی جهت مقایسه نتایج روش‌های بیان شده برای محاسبه توان اصطکاکی

طول پمپ مولکولار (mm)	لقی پمپ مولکولار (mm)	فاصله روتور از بدنه (mm)	سرعت محیطی روتور (m/s)	ارتفاع روتور (mm)	شعاع روتور (mm)
۱۷۰	۱	۲۰	۵۹۰	۱۰۰۰	۱۰۰



روش‌های مورد استفاده در جدول (۲) بر اساس نام نویسنده آن‌ها نامگذاری گردیده است و نتایج بر اساس پارامترهای هندسی و عملیاتی مطابق با جدول فوق برای هر روش و برای سه مقدار مختلف فشار به دست آمده است.

جدول ۲. نتایج به دست آمده برای محاسبه توان اصطکاکی با استفاده از روش‌های مختلف تحلیلی و مولکولی

روش حل	مقادیر توان (وات)		
	P=0.04 Pa	P=0.0083 Pa	P=0.004 Pa
روش ویسکوزیته مؤثر مینهانگ بانو	۹/۷	۲/۰۵	۱/۰۱
روش ویسکوزیته مؤثر ساراف	۳۱/۳۶	۶/۷۴	۳/۲۶
روش تنش برشی ویجولا	۲۸/۹۶	۶/۲۳	۳/۰۲
روش تنش برشی سرسیگانی	۱۲۷/۴	۳۳/۸۴	۱۶/۹۳
روش تنش برشی سون	۲۶/۳۸	۵/۵۹	۲/۷۰۴
روش تنش برشی باهوکودامبی	۲۸/۸۳	۶/۲	۳
روش حل مولکولی	۸/۹۷	۱/۸۸	۰/۹۵

از نتایج جدول فوق می‌توان نتیجه گرفت که مقدار توان اصطکاکی به دست آمده از روش مینهانگ بانو، بیشتر از سایر نتایج به مقدار توان اصطکاکی به دست آمده از روش‌های مولکولی (DSMC) نزدیک است. در نتیجه روش مینهانگ بانو به عنوان روش انتخابی جهت محاسبه مقدار توان اصطکاکی برای رژیم‌های جریانی کاملاً مولکولی و گذرا انتخاب می‌گردد و بر اساس این روش، مقدار توان اصطکاکی در فضای بالا، روبرو و پایین پمپ مولکولار برای فشار پایین پمپ مولکولار ۰/۰۰۲ پاسکال و فشار بالای پمپ مولکولار ۱ پاسکال مطابق با جدول (۳) محاسبه گردیده است.

جدول (۳). مقادیر توان اصطکاکی به دست آمده از حل تحلیلی توان اصطکاکی روش مینهانگ بانو برای گاز هوا

نام قطعه	توان اصطکاکی (وات)
کپ بالا	۱/۸۲۱۲۲۳
روبروی پمپ مولکولار	۴/۹۴۶۴۳۲
پایین پمپ مولکولار	۰/۵
روبروی کرش رینگ	۰/۰۷۵۵۵۰۵
کپ پایین روتور	۰/۰۰۳۳۵۳۲



### نتیجه گیری

با توجه به اینکه مقدار توان اصطکاکی در فضای بین روتور و بدنه ماشین سانتریفیوژ در محاسبه مقدار توان الکتریکی کل ماشین بسیار حائز اهمیت می باشد در نتیجه در این مقاله با استفاده از انواع روش های تحلیلی برای محاسبه مقدار توان اصطکاکی در رژیم جریان کاملاً مولکولی و گذرا، مقدار توان اصطکاکی فضای بیرونی روتور محاسبه گردیده است و در انتها نتایج با نتایج به دست آمده از حل مولکولی (DSMC) مورد مقایسه قرار گرفته است. از مقایسه نتایج می توان مقدار توان اصطکاکی به دست آمده از روش مینهانگ بائو را به عنوان یک روش تحلیل مناسب برای محاسبه مقدار توان اصطکاکی در رژیم جریان مولکولی و گذرا انتخاب کرد.

### مراجع

- [1] B. Minhang, "Analysis And Design Principle Of MemS Devices," Elsevier, pp. 159-200, 2005.
- [2] R. Saraf, "Rarefied Gas Flows Based On Variational Principle", *Appl.Sc*, pp.36,1973.
- [3] C. Cercignani, "A variational principle for boundary value problems in kinetic theory," *Stat.Phys*, vol. 1, p. 297-311, 1969.
- [4] P. Bahukudumbi, J. Park and A. Jae Hyun Beskok, "A Unified Engineering Model For Steady And Quasi-Steady Shear-Driven Gas Microflows," *Mechanical Engineering Department*, pp. 291-314, 2003.
- [5] Veijola and M. Turowski, "Compact Damping Models For Laterally Moving Microstructures With Gas-Rarefaction Effects," *Microelectromech*, vol. 10, p. 263-273, 2001.
- [6] Y. Sone, Takata and T.Ohwada, "Numerical Analysis Of The Plane Couette Flow Of A Rarefied Gas On The Basis Of The Linearized Boltzmann Equation For Hard Sphere Molecules," *Eur.J.Mech.*, vol 9, pp.273-288,1990.
- [7] G.A.Bird, "Molecular Gas Dynamics and the Direct Simulation of Gas Flows," Oxford Science Publications, Midsomer Norton, Avon, UK, 1994