



محاسبه احتمال های ساختار سه باریونی ممکن برای تشکیل هسته هلیوم - ۳ در مدل کواریکی

پیراحمدیان، محمد هادی*^(۱) - رئیس السادات، سید محمد رضا^(۲)

^(۱) گروه علوم پایه، واحد نی ریز، دانشگاه آزاد اسلامی، نی ریز، ایران

^(۲) گروه فیزیک، واحد شیراز، دانشگاه آزاد اسلامی، شیراز، ایران

چکیده:

هسته هلیوم-۳ یک ساختار سه نوکلئونی است. با بررسی این هسته در مدل کواریکی مشاهده می‌شود که یک ساختار نه کواریکی سازنده نوکلئون‌های هسته وجود دارد که مقید نیستند و احتمال تشکیل ساختار سه باریونی مختلفی وجود دارد. با محاسبه احتمال تشکیل هر ساختار باریونی ممکن برای هسته هلیوم-۳ و مقایسه آنها نتیجه می‌گیریم که بیشترین احتمال همان ساختاری است که طبیعت برای هسته هلیوم-۳ شامل دو پروتون و یک نوترون انتخاب کرده است. از تابع موج به دست آمده با توجه به همه ساختارهای باریونی ممکن می‌توان در محاسبه گشتاورهای الکتریکی و مغناطیسی هسته هلیوم-۳ استفاده کرد.

کلمات کلیدی: مدل کواریکی، ساختار باریونی، هسته هلیوم-۳.

مقدمه:

مدل های مختلفی برای بررسی ساختار هسته ها مورد استفاده قرار گرفته است. در مدل کواریکی ویژگی های هسته بر اساس کواریک های محتوایی نوکلئون های هسته مورد بررسی قرار می گیرد. هر نوکلئون شامل سه کواریک بالا (up) و پایین (down) با ویژگی های کوانتومی خاصی است. هر طعم کواریک بار الکتریکی، اسپین، جرم لخت و جرم موثر در ساختار باریونی دارد [۱] که در بررسی احتمال تشکیل باریون مورد توجه قرار می گیرد. از تابع موج باریونی هسته های سبک در احتمال تشکیل هسته و محاسبه گشتاورهای الکتریکی و مغناطیسی هسته ها در مدل کواریکی استفاده می شود [۲] و [۳]. همچنین با استفاده از مدل کواریکی اعداد جادویی هسته ها به دست می آید و عدد جادویی ۱۸۴ قابل پیشگویی است [۴]. با استفاده از مدل کواریکی و در نظر گرفتن برهمکنش موثر بین کواریک ها، ماده هسته مورد بررسی قرار گرفته است [۵] و فرمول جدید برای انرژی بستگی هسته ها بیان شده است [۶].

روش کار:

با توجه به ساختار سه کواریکی باریون ها و توزیع آماری فرمیونی برای کواریک ها، تابع موج هر باریون باید پاد متقارن باشد که با توجه به ویژگی های کوانتومی طعم، رنگ و اسپین و جایگشت های ممکن می توان تابع موج را به دست آورد. بنابراین ساختار کلی تابع موج باریون به صورت زیر است:



$${}^{(1)}|\psi_{Baryon}\rangle = |\psi_{Space}\rangle|\psi_{Color}\rangle|\psi_{Flavor}\rangle|\psi_{Spin}\rangle$$

جمله رنگ تابع موج با توجه به ساختار بدون رنگ باریون ها پاد متقارن است [۷]. جمله فضایی با توجه به غیر نسبیتی بودن این مدل متقارن در نظر گرفته می‌شود [۸]. بنابراین برای پادمقارن بود تابع موج باریون باید حاصل ضرب جمله اسپین و طعم متقارن شود. اسپین هر کوارک $\frac{1}{2}$ است. سه کوارک با اسپین $\frac{1}{2}$ می‌توانند ساختارهای باریونی با اسپین $\frac{1}{2}$ یا $\frac{3}{2}$ را تشکیل دهند. تفاوت کم جرم کوارک‌های بالا و پایین اثر ناچیزی در برهمکنش‌های قوی بنیادی دارد، در نتیجه برهمکنش قوی حاصل بین باریون‌ها تقریباً مستقل از گونه باریون است. این استقلال را با معرفی مفهوم تقارن ایزواسپینی بیان می‌کنیم [۹]. جرم باریون‌ها داری ایزواسپین یکسان را می‌توان تقریباً برابر انتخاب کرد. البته مولفه سوم عملگر ایزواسپین آنها متفاوت است. بنابراین برای ایزواسپین کل $I = \frac{1}{2}$ و مولفه سوم $I_3 = \pm \frac{1}{2}$ ، طعم کوارک‌های u و d سازنده نوکلئون‌ها را به صورت $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle$ و $d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$ در نظر می‌گیریم. اختلاف اندک جرم باریون‌ها با ایزواسپین یکسان ناشی از برهمکنش‌های الکترومغناطیسی ذرات تمیزپذیر ساختار داخلی آنها که بار الکتریکی متفاوتی دارند، است [۱۰]. اسپین باریون‌های ساخته شده از سه کوارک بالا یا سه کوارک پایین فقط مقدار $\frac{3}{2}$ را می‌تواند داشته باشد. جدول (۱) باریون‌های ساخته شده از کوارک‌های بالا و پایین و ویژگی‌های آنها را نشان می‌دهد.

جدول (۱) باریون‌های ساخته شده از کوارک‌های بالا و پایین و ویژگی‌های آنها

باریون	ساختار کوارکی	اسپین	ایزواسپین	I_3	جرم (Mev/c^2)
p	uud	$1/2$	$1/2$	$+1/2$	938
n	udd	$1/2$	$1/2$	$-1/2$	940
Δ^{++}	uuu	$3/2$	$3/2$	$+3/2$	1230
Δ^+	uud	$3/2$	$3/2$	$+1/2$	1230
Δ^0	udd	$3/2$	$3/2$	$-1/2$	1230
Δ^-	ddd	$3/2$	$3/2$	$-1/2$	1230

هسته هلیوم-۳ شامل دو پروتون و یک نوترون است بنابراین این هسته یک سیستم نه کوارکی است که شامل پنج کوارک بالا (u) و چهار کوارک پایین (d) است. این نه کوارک کاملاً در سه نوکلئون سازنده هسته هلیوم-۳ مقید نیستند و این سه نوکلئون می‌توانند به کوارک‌های سازنده‌شان شکسته شوند و سپس سه باریون دیگر را تشکیل دهند. سه باریون جدید تشکیل شده لزوماً ساختارهای باریونی اولیه نیستند، بلکه می‌توانند کاملاً متفاوت از ساختارهای باریونی



اولیه باشند یا اینکه یک یا دو ساختار باریونی مشابه از سه باریون اولیه را نیز تشکیل دهند. با توجه به ساختار کوارکی نوکلئون‌ها، ساختارهای باریونی مجاز دیگر نیز باید شامل کوارک‌های سبک بالا (u) و پایین (d) شوند که باریون‌های دلتا چنین ساختارهایی دارند.

تابع موج هسته هلیوم-۳ باید به گونه‌ای نوشته شود که تمام حالت‌های سه باریونی ممکن را شامل شود. البته با توجه به اسپین این هسته، احتمال تشکیل هسته هلیوم-۳ از ساختارهای باریونی جدول (۲) متفاوت است. پس از نوشتن تابع موج این ساختارهای سه باریونی، با توجه به قید اسپین تابع موج، احتمال تشکیل هسته از هر ساختار سه باریونی را به صورت آماری با شمارش جملات تابع موج با مولفه اسپین $\frac{1}{2}$ محاسبه می‌کنیم.

جدول (۲) ساختار سه باریونی ممکن برای هسته هلیوم-۳

(p, p, n)	(n, p, Δ^+)	(Δ^+, Δ^0, p)	(Δ^+, Δ^+, n)	$(\Delta^+, \Delta^+, \Delta^0)$
$(\Delta^{++}, \Delta^-, \Delta^+)$	$(\Delta^{++}, \Delta^0, \Delta^0)$	$(\Delta^{++}, \Delta^0, n)$	(Δ^{++}, n, n)	$(\Delta^{++}, \Delta^-, p)$

تابع موج کوارکی نوکلئون‌ها با اسپین $\frac{1}{2}$ را با در نظر گرفتن همه جایگشت‌های ممکن بین طعم و اسپین کوارک‌ها و با توجه به اینکه قسمت فضایی تابع موج متقارن و قسمت رنگ پادمقارن است، از ترکیب تقارن آمیخته اسپین-طعم به صورت $(\Psi_M(\text{spin})_S \Psi_M(\text{flavor})_S)$ و $(\Psi_M(\text{spin})_A \Psi_M(\text{flavor})_A)$ حالت متقارن نتیجه می‌شود. ترکیب خطی آنها نیز متقارن است که به‌نجار شده آن به صورت زیر است:

$$\Psi(\text{spin})\Psi(\text{flavor}) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\Psi_M(\text{spin})_S \Psi_M(\text{flavor})_S + \Psi_M(\text{spin})_A \Psi_M(\text{flavor})_A] \quad (2)$$

بنابراین می‌توانیم قسمت اسپینی و طعم تابع حالت یک پروتون با اسپین $\frac{1}{2}$ را به صورت زیر بنویسیم:

$$|P \uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{18}} \begin{bmatrix} 2|u \uparrow u \uparrow d \downarrow\rangle - |u \uparrow u \downarrow d \uparrow\rangle - |u \downarrow u \uparrow d \uparrow\rangle + \\ 2|u \uparrow d \downarrow u \uparrow\rangle - |u \uparrow d \uparrow u \downarrow\rangle - |u \downarrow d \uparrow u \uparrow\rangle + \\ 2|d \downarrow u \uparrow u \uparrow\rangle - |d \uparrow u \downarrow u \uparrow\rangle - |d \uparrow u \uparrow u \downarrow\rangle \end{bmatrix} \quad (3)$$

در رابطه (۳) نماد \uparrow بیانگر کوارک با اسپین بالا و \downarrow بیانگر کوارک با اسپین پایین است. هر جمله رابطه بالا دارای

برچسب به صورت $uud \equiv u(1)u(2)d(3)$ است.

تابع موج نوترون با اسپین $\frac{1}{2}$ با تعویض $d \leftrightarrow u$ در تابع موج پروتون به دست می‌آید.

تابع موج باریون‌های دلتا که دارای اسپین $\frac{3}{2}$ هستند را به همین ترتیب محاسبه می‌کنیم. قسمت اسپینی تابع موج باریون‌های

دلتا با اسپین $\frac{3}{2}$ متقارن است و می‌توان آنرا به صورت زیر نوشت:



$$\left. \begin{aligned} \left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle &\equiv (\uparrow\uparrow\uparrow) \\ \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle &\equiv \frac{1}{\sqrt{3}} (\uparrow\uparrow\downarrow + \uparrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\uparrow) \\ \left| \frac{3}{2}, \frac{-1}{2} \right\rangle &\equiv \frac{1}{\sqrt{3}} (\uparrow\downarrow\downarrow + \downarrow\uparrow\downarrow + \downarrow\downarrow\uparrow) \\ \left| \frac{3}{2}, \frac{-3}{2} \right\rangle &\equiv (\downarrow\downarrow\downarrow) \end{aligned} \right\} \text{for spin } \frac{3}{2}, (\Psi_{Spin}^{Symmetry}) \quad (4)$$

برای باریون Δ^{++} که از سه کوآرک بالا تشکیل شده است، قسمت طعم تابع موج متقارن است. بنابراین حاصلضرب قسمت اسپین و طعم $\Psi(\text{spin})\Psi(\text{flavor})$ تابع موج این باریون متقارن است و به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(5) \quad \left| \Delta^{++}; \frac{3}{2}, \frac{+3}{2} \right\rangle = u \uparrow u \uparrow u \uparrow \quad \left| \Delta^{++}; \frac{3}{2}, \frac{-3}{2} \right\rangle = u \downarrow u \downarrow u \downarrow$$

$$\left| \Delta^{++}; \frac{3}{2}, \frac{+1}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (u \uparrow u \uparrow u \downarrow + u \uparrow u \downarrow u \uparrow + u \downarrow u \uparrow u \uparrow)$$

$$\left| \Delta^{++}; \frac{3}{2}, \frac{-1}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (u \uparrow u \downarrow u \downarrow + u \downarrow u \uparrow u \downarrow + u \downarrow u \downarrow u \uparrow)$$

یادآور می‌شویم سه کوآرک بالا (uuu) در تابع موج رابطه (5) دارای سه رنگ متفاوت آبی، سبز و قرمز هستند.

با توجه به قسمت اسپینی تابع موج باریون‌های دلتا (رابطه 5) و طعم هر یک از آنها (جدول 1)، حاصلضرب

قسمت اسپین و طعم تابع موج باریون‌های دلتای دیگر را نیز به دست می‌آوریم. (پیوست الف و ب)

تابع موج هسته هلیوم-3 با توجه به ساختارهای باریونی ممکن و اسپین $\frac{1}{2}$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\Psi(\frac{3}{2}\text{He}) = c(\Delta^{++}, \Delta^-, \Delta^+) \Psi(\Delta^{++}, \Delta^-, \Delta^+) + \quad (6)$$

$$\begin{aligned} &c(\Delta^{++}, \Delta^0, \Delta^0) \Psi(\Delta^{++}, \Delta^0, \Delta^0) + c(\Delta^{++}, \Delta^0, n) \Psi(\Delta^{++}, \Delta^0, n) + c(\Delta^{++}, n, n) \Psi(\Delta^{++}, n, n) + \\ &c(\Delta^{++}, \Delta^-, p) \Psi(\Delta^{++}, \Delta^-, p) + c(\Delta^+, \Delta^+, \Delta^0) \Psi(\Delta^+, \Delta^+, \Delta^0) + c(\Delta^+, \Delta^+, n) \Psi(\Delta^+, \Delta^+, n) + \\ &c(\Delta^+, \Delta^0, p) \Psi(\Delta^+, \Delta^0, p) + c(n, p, \Delta^+) \Psi(n, p, \Delta^+) + c(p, p, n) \Psi(p, p, n) \end{aligned}$$

ضرایب کلبش - گوردون هر جمله را با قید اسپین $\frac{1}{2}$ محاسبه می‌کنیم. سپس تعداد راه‌های ممکن برای تشکیل هسته هلیوم-3 با اسپین $\frac{1}{2}$ را شمارش می‌کنیم که نتیجه آن در جدول (3) آورده شده است.

جدول (3) تعداد راه‌های ممکن برای تشکیل هسته هلیوم-3 توسط سه باریون

→ باریون	$(\Delta^{++}, \Delta^-, \Delta^+)$	$(\Delta^{++}, \Delta^-, p)$	$(\Delta^+, \Delta^+, \Delta^0)$	(Δ^+, Δ^0, p)	(Δ^+, Δ^+, n)
تعداد راه‌ها	126	240	378	2160	648
→ باریون	$(\Delta^{++}, \Delta^0, \Delta^0)$	$(\Delta^{++}, \Delta^0, n)$	(Δ^{++}, n, n)	(Δ^+, p, n)	(p, p, n)
تعداد راه‌ها	126	720	216	2160	2304



در رابطه (۶) مربع ضرایب هر جمله بیانگر احتمال تشکیل هسته هلیوم-۳ برای آن ساختار سه باریونی است. با توجه به این نکته که اسپین هسته هلیوم $\frac{1}{2}$ است، بنابراین مولفه Z اسپین هلیوم می‌تواند مقادیر $\left(+\frac{1}{2}\right)$ و $\left(-\frac{1}{2}\right)$ را داشته باشد. تعداد حالت‌هایی که هر یک از ساختارهای سه باریونی رابطه (۱۱) منجر به تشکیل هسته هلیوم می‌شود را می‌شماریم. سپس حالت‌هایی که اسپین کل تابع موج تشکیل شده از سه باریون مخالف با $\frac{1}{2}$ است را از مجموع حالت‌های شمرده شده کم می‌کنیم. نتیجه این شمارش حالت‌ها برای هسته هلیوم-۳ در جدول (۳) آورده شده است. به عنوان مثال تابع موج $\Psi(p, p, n)$ با توجه به اسپین هسته هلیوم و اصل طرد پائولی برای فرمیون‌ها، شامل دو حالت با اسپین $\frac{1}{2}$ می‌شود که تابع موج هر حالت با در نظر گرفتن همه جایگشت‌های ممکن بین کوارک‌ها، شامل ۱۷۲۸ جمله می‌گردد.

$$\Psi(n, p, p) \equiv \left|n: \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle \left|p: \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle \left|p: \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right\rangle \quad \text{و} \quad \Psi(n, p, p) \equiv \left|n: \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right\rangle \left|p: \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle \left|p: \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right\rangle \quad (7)$$

بنابراین جمعاً ۳۴۵۶ جمله برای دو تابع موج حالت $\Psi(n, p, p)$ داریم. با توجه به جمع برداری اسپین سه باریون که نتیجه آن مقادیر $\frac{3}{2}$ و $\frac{1}{2}$ است، $S = S_3 \oplus (S_1 \oplus S_2) \begin{cases} \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{cases}$ اگر حالت‌های با مولفه Z اسپین با مقدار $+\frac{1}{2}$ را شمارش کنیم، تعداد ۲۳۰۴ به دست می‌آید که بیانگر تعداد راه‌های ممکن برای تشکیل هسته هلیوم با توجه به ساختار نه کوارکی سه باریون (p, p, n) و در نظر گرفتن همه جایگشت‌های ممکن است.

بحث و نتیجه گیری :

همانطور که در جدول (۳) مشاهده می‌شود، بیشترین احتمال، تاکید بر انتخاب طبیعت برای ساختن هسته هلیوم، مربوط به ساختار سه باریونی دو پروتون و یک نوترون (p, p, n) است که حدود ۳۰ درصد می‌باشد. برای ساختارهای سه باریونی شامل باریون‌های دلتا احتمال کمتری برای تشکیل هسته هلیوم-۳ مشاهده می‌شود. با در نظر گرفتن همه ساختارهای باریونی ممکن در تابع موج هسته هلیوم-۳ در محاسبه کمیت‌های قابل اندازه‌گیری مانند گشتاورهای الکتریکی و مغناطیسی نتایج بهتری در مقایسه با در نظر گرفتن ساختار نوکلئونی در مدل کوارکی هسته به دست می‌آید.

مراجع :

- [1] D. J. Griffiths, Introduction to Elementary Particles, John Wiley and Sons, New York, (2008).
- [2] M.H. Pirahmadian, N. Ghahramany, Results in Phys., 7:2771-2774, (2017).
- [3] N. Ghahramany, and E. Yazdankish, Commun. Theor. Phys., 59, 579, (2013).
- [4] N. Ghahramany, H. Hora, G.H. Miley, M. Ghanaatian, M.Hooshmand, K. Philbert, and F. Osman, Phys. Essay21, 3, (2008).
- [5] M. Baldo and K. Fukukawa, Phys. Rev. Lett. 113, 242501, (2014).



[6] N. Ghahramany, Sh. Gharaati, and M. Ghanaatian, Phys. of Elementary Particles and Atomic Nuclei Theory 8, 97, (2011).

[7] W. Park, A. Park, and S. Houn Lee, Phys. Rev. D, 92, (2015).

[8] L. Durand, P. Ha, and G. Jaczko Phys. Rev. D, 64, (2001).

[9] H. Song, X. Zhang, and B. Q. Ma, Phys. Rev. D, 82, (2010).

[10] A. Courtoy, F. Fratini, S. Scopetta, and V. Vento, Phys. Rev. D, 78, (2008).

پیوست (الف)

حاصلضرب جمله‌های اسپین و طعم تابع موج برای باریون Δ^+ با ساختار کوارکی (uud) به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} \left| \Delta^+; \frac{3}{2}, \frac{+3}{2} \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} (|u \uparrow u \uparrow d \uparrow\rangle + |u \uparrow d \uparrow u \uparrow\rangle + |d \uparrow u \uparrow u \uparrow\rangle) \\ \left| \Delta^+; \frac{3}{2}, \frac{+1}{2} \right\rangle &= \frac{1}{3} (|u \uparrow u \uparrow d \downarrow\rangle + |u \uparrow u \downarrow d \uparrow\rangle + |u \downarrow u \uparrow d \uparrow\rangle + |u \uparrow d \uparrow u \downarrow\rangle + |u \uparrow d \downarrow u \uparrow\rangle \\ &\quad + |u \downarrow d \uparrow u \uparrow\rangle + |d \uparrow u \uparrow u \downarrow\rangle + |d \uparrow u \downarrow u \uparrow\rangle + |d \downarrow u \uparrow u \uparrow\rangle) \\ \left| \Delta^+; \frac{3}{2}, \frac{-1}{2} \right\rangle &= \frac{1}{3} (|u \uparrow u \downarrow d \downarrow\rangle + |u \downarrow u \uparrow d \downarrow\rangle + |u \downarrow u \downarrow d \uparrow\rangle + |u \uparrow d \downarrow u \downarrow\rangle + |u \downarrow d \uparrow u \downarrow\rangle \\ &\quad + |u \downarrow d \downarrow u \uparrow\rangle + |d \uparrow u \downarrow u \downarrow\rangle + |d \downarrow u \uparrow u \downarrow\rangle + |d \downarrow u \downarrow u \uparrow\rangle) \\ \left| \Delta^+; \frac{3}{2}, \frac{-3}{2} \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} (|u \downarrow u \downarrow d \downarrow\rangle + |u \downarrow d \downarrow u \downarrow\rangle + |d \downarrow u \downarrow u \downarrow\rangle) \end{aligned}$$

پیوست (ب)

برای باریون Δ^0 با ساختار کوارکی (udd) نیز حاصلضرب قسمت اسپین در طعم تابع موج به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} \left| \Delta^0; \frac{3}{2}, \frac{+3}{2} \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} (d \uparrow d \uparrow u \uparrow + d \uparrow u \uparrow d \uparrow + u \uparrow d \uparrow d \uparrow) \\ \left| \Delta^0; \frac{3}{2}, \frac{+1}{2} \right\rangle &= \frac{1}{3} (|d \uparrow d \uparrow u \downarrow\rangle + |d \uparrow d \downarrow u \uparrow\rangle + |d \downarrow d \uparrow u \uparrow\rangle + |d \uparrow u \uparrow d \downarrow\rangle + |d \uparrow u \downarrow d \uparrow\rangle \\ &\quad + |d \downarrow u \uparrow d \uparrow\rangle + |u \uparrow d \uparrow d \downarrow\rangle + |u \uparrow d \downarrow d \uparrow\rangle + |u \downarrow d \uparrow d \uparrow\rangle) \\ \left| \Delta^0; \frac{3}{2}, \frac{-1}{2} \right\rangle &= \frac{1}{3} (|d \uparrow d \downarrow u \downarrow\rangle + |d \downarrow d \uparrow u \downarrow\rangle + |d \downarrow d \downarrow u \uparrow\rangle + |d \uparrow u \downarrow d \downarrow\rangle + |d \downarrow u \uparrow d \downarrow\rangle \\ &\quad + |d \downarrow u \downarrow d \uparrow\rangle + |u \uparrow d \downarrow d \downarrow\rangle + |u \downarrow d \uparrow d \downarrow\rangle + |u \downarrow d \downarrow d \uparrow\rangle) \\ \left| \Delta^0; \frac{3}{2}, \frac{-3}{2} \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} (|d \downarrow d \downarrow u \downarrow\rangle + |d \downarrow u \downarrow d \downarrow\rangle + |u \downarrow d \downarrow d \downarrow\rangle) \end{aligned}$$

برای باریون Δ^- با ساختار کوارکی (ddd) نیز نتیجه می‌شود:



$$\begin{aligned} \left| \Delta^{-}; \frac{3}{2}, \frac{+3}{2} \right\rangle &= d \uparrow d \uparrow d \uparrow \\ \left| \Delta^{-}; \frac{3}{2}, \frac{+1}{2} \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} (d \uparrow d \uparrow d \downarrow + d \uparrow d \downarrow d \uparrow + d \downarrow d \uparrow d \uparrow) \\ \left| \Delta^{-}; \frac{3}{2}, \frac{-1}{2} \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} (d \uparrow d \downarrow d \downarrow + d \downarrow d \uparrow d \downarrow + d \downarrow d \downarrow d \uparrow) \\ \left| \Delta^{-}; \frac{3}{2}, \frac{-3}{2} \right\rangle &= d \downarrow d \downarrow d \downarrow \end{aligned}$$