



## محاسبات میکروسکوپی نسبت چگالی ترازهای هسته‌ای با پارته‌های مخالف در $^{56}\text{Fe}$

نوری، امیدرضا\*<sup>(۱)</sup> - رضوی نژاد، روح‌اله<sup>(۲)</sup> - رحمتی نژاد، اعظم<sup>(۳)</sup>

<sup>(۱)</sup> دانشگاه پیام نور، گروه فیزیک، مرکز مشهد

<sup>(۲)</sup> دانشگاه جامع امام حسین (ع)، دانشکده علوم پایه، گروه فیزیک، تهران

<sup>(۳)</sup> موسسه مشترک تحقیقات هسته‌ای، دوبنا، روسیه

### چکیده:

در این مقاله نسبت چگالی تراز هسته‌ای با پارته‌های مخالف برای هسته  $^{56}\text{Fe}$  محاسبه و مورد مطالعه قرار گرفته است. به این منظور چگالی تراز وابسته به پارته با استفاده از فرمول‌بندی نظریه ابرسانایی تعمیم‌یافته در سیستم‌های با ابعاد کوچک محاسبه شده است. نتیجه محاسبات نشان می‌دهد که در توافق با مشاهدات تجربی در انرژی‌های پایین، چگالی ترازها با پارته مثبت بیشتر از چگالی ترازها با پارته منفی است. در انرژی‌های بالاتر از  $12\text{ MeV}$  مقدار عددی نسبت چگالی تراز هسته‌ای با پارته‌های مخالف به یک میل می‌کند و می‌توان در این ناحیه انرژی از مدل‌های پدیده‌شناختی با فرض توزیع پارته‌های یکسان استفاده نمود.

**کلمات کلیدی:** چگالی تراز هسته‌ای، پارته، مدل‌های هسته‌ای.

### مقدمه:

چگالی تراز هسته‌ای، از ویژگی‌های مختص هر هسته می‌باشد که اهمیت و کاربرد آن طیف وسیعی از حوزه‌ها از جمله پزشکی هسته‌ای را شامل شده و نقش مهمی در محاسبات آماری فیزیک رآکتور، مدل‌های هسته‌ای و اختریف فیزیک ایفا می‌کند. این کمیت در مطالعه ساختار هسته و محاسبه سطح مقطع واکنش‌های هسته‌ای اهمیت بالایی دارد. محاسبات اولیه چگالی تراز هسته‌ای توسط بیت‌آو بیش از هشتاد سال پیش انجام شد. وی بررسی‌های اولیه بر روی چگالی تراز هسته‌ای را با استفاده از مدل گاز فرمی<sup>۳</sup> انجام داد که حاصل آن استخراج فرمول چگالی تراز هسته‌ای وابسته به انرژی بود. پس از آن، این مطالعات به وسیله محققان دیگر با استفاده از مدل‌های میکروسکوپی از جمله مدل لایه‌ای و همچنین در نظر گرفتن اثرهای تجمعی ادامه یافت. در سال‌های اخیر نیز تلاش‌های فراوانی در خصوص فرمول‌بندی و توصیف

<sup>۱</sup> Nuclear Level Density (NLD)

<sup>۲</sup> Bethe

<sup>۳</sup> Fermi Gas Model (FGM)



چگالی تراز هسته‌ای در مدل‌های میکروسکوپی به منظور پیاده‌سازی در کدهای کامپیوتری جهت انجام محاسبات سطح مقطع هسته‌ای، صورت پذیرفته است. یکی از موفق‌ترین مدل‌ها در توصیف چگالی ترازهای هسته‌ای و دیگر کمیت‌های ترمودینامیک هسته مدل میکروسکوپی<sup>۴</sup> BCS می‌باشد. این مدل که بر پایه نظریه ابررسانایی در هسته‌ها تعریف شده است، تمایل نوک‌نوناها به تشکیل حالت‌های جفت‌شده با اسپین‌های مخالف را در نظر می‌گیرد [۱]. همچنین مدل BCS، برخلاف مدل‌های نیمه تجربی که وابسته به داده‌های تجربی چگالی ترازهای هسته‌ای در انرژی‌های پایین هستند، از داده‌های تجربی مستقل است. لذا می‌توان از این مدل در بررسی هسته‌هایی که داده‌های تجربی مربوط به چگالی تراز آن‌ها در محدوده انرژی‌های پایین در دسترس نیست، استفاده نمود. به همین علت این مدل به خصوص در مطالعه ویژگی‌های مختلف هسته در پژوهش‌های اخیر مورد استفاده قرار گرفته است [۲-۶].

مدل‌های برهمکنش هسته‌ای و محاسبات مربوط به انتقال نوترون نیاز به اطلاعات مرتبط با چگالی تراز هسته‌ای و وابستگی آن با انرژی و سایر اعداد کوانتومی مثل پارته، اسپین، ایزو اسپین و غیره دارد. تاکنون بیشتر مطالعات چگالی تراز هسته‌ای در حوزه وابستگی آن به انرژی برانگیختگی انجام شده و مطالعات اندکی بر روی وابستگی چگالی تراز هسته‌ای به پارته صورت گرفته است. در واقع در مدل‌های پدیده شناختی فرض بر رخداد پارته یکسان در تمام محدوده انرژی است؛ حال آنکه با توجه به داده‌های تجربی و اطلاعات محدود در خصوص وابستگی چگالی تراز به پارته در انرژی‌های پایین، این فرضیه فقط در انرژی‌های برانگیختگی بالا (چند ده مگا الکترون‌ولت) یا برای هسته‌های سنگین قابل اعتماد است. در هسته‌های سبک‌تر داده‌های تجربی تفاوت قابل ملاحظه‌ای بین توزیع پارته‌های مخالف در چگالی تراز هسته‌ای را نشان می‌دهد. در سال‌های اخیر روش‌هایی برای وارد کردن پارامتر پارته به محاسبات چگالی ترازهای هسته‌ای در بستر مدل‌های میکروسکوپی از جمله مدل BCS صورت گرفته است. لذا در این مقاله با استفاده از نرم‌افزار متلب<sup>۵</sup> و معادلات مدل BCS، کدی را تولید کردیم که بتوان وابستگی چگالی تراز هسته‌ای به پارته در هسته‌های سبک و انرژی‌های پایین را با توجه به کاربرد و اهمیت موضوع، مورد بررسی قرار داده و نتایج حاصل را با مقادیر تجربی مقایسه نمود.

## روش کار:

در توصیف کمیت‌های مختلف هسته‌ها از فرم کلی زیر برای چگالی ترازهای هسته‌ای استفاده می‌شود [۷]:

$$\rho(U, J, \pi) = F_{\pi}(\pi) F_J(J, U) \rho(U). \quad (1)$$

<sup>۴</sup>Bardeen Cooper Schrieffer (BCS)

<sup>۵</sup>MATLAB



در رابطه (۱)،  $\rho(U)$  بخش وابسته به انرژی برانگیختگی می‌باشد و همان طور که پیش‌تر اشاره شد مدل‌های تئوری و نیمه‌تجربی مختلفی از جمله مدل گاز فرمی برای توصیف آن ارائه شده‌اند. با فرض این که اسپین هسته حاصل برآیند بردار اسپین ذرات مستقل از هم است برای بخش وابسته به اسپین ( $J$ ) معمولاً یک توزیع گاوسی بصورت زیر در نظر گرفته می‌شود [۸]:

$$F_J(J,U) = \frac{2J+1}{2\sigma^2(U)} \exp\left(\frac{-(J+\frac{1}{2})}{2\sigma^2(U)}\right), \quad (2)$$

که در آن،  $\sigma^2$  پهنای توزیع گاوسی است که به عنوان پارامتر قطع اسپین<sup>۱</sup> در نظر گرفته می‌شود (رابطه (۱۱)). لازم به ذکر است درستی این فرض در انرژی‌های مختلف بررسی و تایید شده است [۹]. بنا به فرض مدل‌های پدیده‌شناختی توزیع ترازهای با پارامتر مثبت و منفی در حالت‌های برانگیخته هسته‌ای یکسان می‌باشد. به همین دلیل مقدار  $F_{\pi}(\pi)=1/2$  برای توزیع پارامتر در چگالی ترازهای هسته‌ای در نظر گرفته می‌شود [۷]. برای بررسی با حل معادلات اولیه مدل BCS که معادله تعداد ذرات و معادله گاف نام دارند، کمیت‌های قدرت جفت‌شدگی ( $G$ )، پارامتر گاف ( $\Delta$ ) و پتانسیل شیمیایی ( $\lambda$ ) به دست می‌آیند. سپس چگالی تراز محاسبه و بعد از آن با وارد کردن پارامتر، نسبت توزیع پارامترهای مخالف در چگالی تراز هسته‌ای مورد بررسی قرار می‌گیرد [۱۰].

معادلات لگاریتم تابع پارش، تعداد ذرات ( $N$ )، قدرت جفت‌شدگی ( $G$ ) و انرژی شبه‌ذرات ( $E_k$ ) در مدل BCS به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند [۱۱]:

$$\ln Z(\alpha,\beta) = -\beta \sum_k (\varepsilon_k - \lambda - E_k) + 2 \sum_k \ln[1 + \exp(-\beta E_k)] - \beta \frac{\Delta^2}{G} \quad (3)$$

و

$$N = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = \sum_k \left(1 - \frac{\varepsilon_k - \lambda}{E_k} \tanh\left(\frac{\beta E_k}{2}\right)\right) \quad (4)$$

و

<sup>۱</sup>Spin Cut-Off parameter



$$\frac{2}{G} = \sum_k \frac{1}{E_k} \tanh\left(\frac{\beta E_k}{2}\right) \quad (5)$$

و

$$E_k = \sqrt{(\varepsilon_k - \lambda)^2 + \Delta^2}. \quad (6)$$

در روابط فوق  $\Delta$  نشانگر پارامتر گاف و  $\lambda$  نشانگر پتانسیل شیمیایی است. همچنین در تمامی روابط  $\beta=1/T$  و  $\varepsilon_k$  انرژی ترازهای تک‌ذره می‌باشد. لازم به ذکر است در انجام محاسبات این مقاله از انرژی ترازهای تک ذره‌ای محاسبه شده در مدل نیلسون استفاده شده است. همچنین به منظور در نظر گرفتن تغییرات نرم پارامتر گاف در نزدیکی دمای بحرانی گذار فاز جفت‌شدگی در سیستم هسته، به جای مقادیر دقیق به دست آمده از معادلات BCS که برای سیستم ابررسانای نامحدود تعریف شده‌اند، از تابع تعمیم‌یافته زیر برای پارامتر گاف استفاده شده است:

$$\Delta = \frac{\Delta_0}{1 + \exp\left(\frac{T - T_m}{a}\right)}, \quad (7)$$

که در آن  $\Delta_0$  پارامتر گاف در دمای صفر است.  $a$  و  $T_m$  پارامترهای آزاد هستند که بر اساس وابستگی پارامتر گاف به انرژی در نزدیکی دمای بحرانی محاسبه می‌شوند [۲ و ۱۲]. در ادامه با استفاده از معادلات موجود در مدل ابررسانایی هسته و جایگزین کردن مقادیر پارامتر گاف و پتانسیل شیمیایی حاصل در این روابط، کمیت‌های ترمودینامیکی شامل انرژی برانگیختگی، آنتروپی، ظرفیت گرمایی، پارامتر قطع اسپین، چگالی حالت‌های هسته‌ای و در نهایت چگالی تراز هسته‌ای (بترتیب روابط (۸) تا (۱۳)) قابل استخراج خواهند بود [۴ و ۱۱]:

$$E = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = \sum_k \left(1 - \frac{\varepsilon_k - \lambda}{E_k} \tanh\left(\frac{\beta E_k}{2}\right)\right) \varepsilon_k - \frac{\Delta^2}{G} \quad (8)$$

و

$$S = \ln Z - \alpha N + \beta E = 2 \sum_k \ln[1 + \exp(-\beta E_k)] + 2\beta \sum_k \frac{E_k}{1 + \exp(\beta E_k)} \quad (9)$$

و

$$C = -\beta^2 \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^2} = \frac{1}{2} \sum_k \operatorname{sech}^2\left(\frac{\beta E_k}{2}\right) \left[\beta^2 E_k^2 - \beta \Delta \frac{d\Delta}{dT}\right] \quad (10)$$



و

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} \sum_k m_k^2 \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\beta E_k}{2} \right) \quad (11)$$

و

$$\omega(N, Z, U) = \frac{\exp(S)}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} |D|^{\frac{1}{2}}} \quad (12)$$

و

$$\rho(N, Z, U) = \frac{\omega(N, Z, U)}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (13)$$

پس از انجام محاسبات فوق، به منظور استخراج نسبت چگالی تراز با پارितه مخالف از رابطه ساده‌ای که برای نسبت احتمال حالت‌های با پارितه فرد به زوج معرفی شده است، استفاده خواهد شد [۱۳]:

$$\frac{P^-}{P^+} = \tanh(f), \quad (14)$$

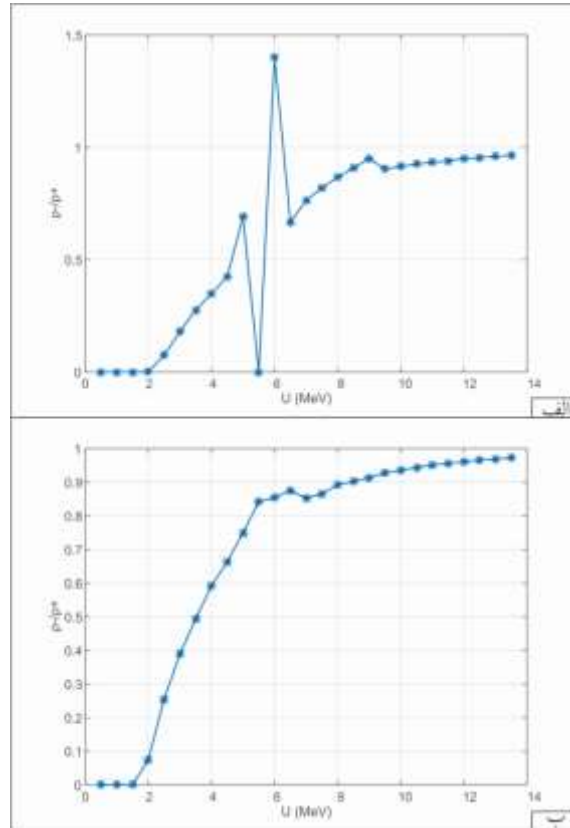
که  $f$  میانگین اشغال حالت‌های با پارितه  $\pi$  است. در نهایت برای نسبت چگالی تراز با پارितه مخالف داریم [۱۴]:

$$\frac{\rho^-}{\rho^+} = \frac{\beta^- Z^-}{\beta^+ Z^+} \sqrt{\frac{C^+}{C^-}} e^{(\beta^- - \beta^+) E}. \quad (15)$$

در این رابطه  $C$  نماد ظرفیت گرمایی است که پیش‌تر برای پارितه منفی و مثبت محاسبه شده است [۴].

## نتایج:

نمودار مربوط به رابطه (۱۵) با حل معادلات BCS به ترتیب برای حالت محاسبه با استفاده از پارامتر گاف و محاسبه با استفاده از پارامتر گاف اصلاح شده رابطه (۷)، به صورت شکل شماره (۱) حاصل شده است.



شکل شماره (۱): الف- نمودار نسبت چگالی تراز هسته‌ای با پارایته منفی به مثبت برحسب انرژی برانگیختگی با استفاده از پارامتر گاف ثابت در هسته  $^{56}\text{Fe}$ ، ب- نمودار نسبت چگالی تراز هسته‌ای با پارایته منفی به مثبت برحسب انرژی برانگیختگی با استفاده از پارامتر گاف اصلاح شده در هسته  $^{56}\text{Fe}$ .

همانطور که در نمودارها مشاهده می‌شود، مطابق مشاهدات تجربی و بر خلاف فرض مدل‌های پدیده‌شناختی که در تمام حالت‌های برانگیخته هسته‌ای نسبت چگالی ترازهای هسته‌ای با پارایته مخالف را با یکدیگر برابر در نظر می‌گیرند، این نسبت در حالت‌های با انرژی‌های برانگیختگی پایین با یکدیگر برابر نبوده و در این محدوده، چگالی تراز با پارایته مثبت بزرگتر از چگالی تراز با پارایته منفی است و از انرژی حدود 12 MeV به بعد مقدار این نسبت به یک میل می‌کند. همچنین شکستگی ناشی از گذار فاز به دلیل استفاده از پارامتر گاف در محدوده انرژی 5-6 MeV در شکل شماره ۱. الف کاملاً مشهود است در صورتی که در شکل شماره ۱. ب به دلیل جایگزینی پارامتر گاف اصلاح شده، نمودار شکل بسیار هموارتری پیدا کرده است.



### بحث و نتیجه‌گیری:

در این مقاله با توجه به اینکه برای هسته‌های سبک‌تر داده‌های تجربی تفاوت قابل ملاحظه‌ای بین توزیع پارامترهای مخالف در چگالی تراز هسته‌ای را نشان می‌دهد، نسبت چگالی تراز هسته‌ای با پارامترهای مخالف را با مطالعه بر روی هسته سبک  $^{56}\text{Fe}$  مورد بررسی قرار دادیم. کلیه محاسبات مربوط به چگالی تراز و دیگر کمیت‌های ترمودینامیکی در مدل BCS با استفاده از پارامتر گاف و نیز پارامتر گاف اصلاح شده انجام شدند. همان‌طور که در هر دو نمودار حاصل مشاهده می‌شود و در توافق با داده‌های تجربی، فرض برابری نسبت چگالی ترازهای هسته‌ای با پارامترهای مخالف در حالت‌های انرژی‌های برانگیختگی پایین نقض شده و از انرژی حدود 12 MeV به بعد مقدار این نسبت تقریباً برابر با یک می‌شود.

### مراجع:

- [1] J. Bardeen, L. N. Cooper and J. R. Schrieffer, Theory of superconductivity, Phys. Rev. 108, 1175, (1957).
- [2] R. Razavi, A. Rashed Mohassel, A. Rahmatinejad, A. Jabarpour, Systematic of critical temperature of nuclear pairing transition, Nucl. Phys. A 976, 61, (2018).
- [3] A. Rahmatinejad, R. Razavi, T. Kakavand, Studying temperature dependence of pairing gap parameter in a nucleus as a small superconducting system, Int. Jour. of Mod. Phys. E 25, 1650050, (2016).
- [4] A. Rahmatinejad, R. Razavi, T. Kakavand, Thermal quantities of  $^{46}\text{Ti}$ , Nucl. Phys. A 939, 46, (2015).
- [5] R. Razavi, Role of neutrons and protons in entropy, spin cut off parameters, and moments of inertia, Phys. Rev. C 88, 014316, (2013).
- [6] R. Razavi, et al., Ratio of neutron and proton entropy excess in  $^{121}\text{Sn}$  compared to  $^{122}\text{Sn}$ , Phys. Rev. C 86, 047303, (2012).
- [7] B.V. Rao, H.M. Agrawal, Parity Dependence of the Nuclear Level Density at High Excitation, Nuclear Physics A, 592, pp. 1-8, (1995).
- [8] Y. Alhassid, G. F. Bertsch, L. Fang, S. Liu, Phys. Rev. C 72, 064326, (2005).
- [9] C. Bloch, Theory Of Nuclear Level Density, Phys. Rev. 93, 1094, Vol. 93, Iss. 5, (1954).
- [10] D. Mocolj et al., Parity-Dependence in the Nuclear Level Density, Nuclear Physics A, 758, 154c-157c, (2005).
- [11] A.N. Behkami and J.R. Huizenga, Comparison Of Experimental Level Densities and Spin Cut Off Factors with Microscopic Theory For Nuclei Near  $A=60$ , Nuclear Physics A, 217, pp. 78-92, (1973).
- [12] A. Rahmatinejad, R. Razavi and T. Kakavand, Temperature dependent pairing gap in nucle, Int. Jour of. Mod. Phys. E. Vol 27, No 01, 1850003, (2018).
- [13] Y. Alhassid, G.F. Bertsch, S. Liu and H. Nakada, Parity Dependence of Nuclear Level Densities, Phys. Rev. Lett, Vol 84, Number 19, pp. 4313- 4316, (2000).
- [14] D. Mocolj et al., Large-scale prediction of the parity distribution in the nuclear level density and application to astrophysical reaction rates, Phys.Rev. C 75, 045805, (2007).