



انرژی بستگی و انرژی میدان‌های مزونی ایزوتوپ‌های $^{182-214}\text{Pb}$ با استفاده از مدل میدان میانگین نسبیتی

یغمایی، بامداد - مہمان دوست خواجه‌داد، علی‌اکبر* - دهقانی، وحید

دانشگاه سیستان و بلوچستان، دانشکده علوم، گروه فیزیک

چکیده:

انرژی میدان‌های مزونی و انرژی بستگی برخی ایزوتوپ‌های سرب با اعداد جرمی $A=182-214$ بر پایه مدل میدان میانگین نسبیتی محاسبه شده است. نتایج محاسباتی توافق قابل قبولی با نتایج تجربی دارد. بیشترین همخوانی برای ایزوتوپ‌های پایدار به دست آمد و با کاهش تعداد نوترون‌ها، اختلاف بین محاسبه و تجربه تا حدود ۷۳ کیلو الکترون ولت افزایش یافت.

کلید واژه: مدل میدان میانگین نسبیتی، انرژی بستگی، سرب

مقدمه:

مدل هسته‌ای میدان میانگین نسبیتی مدلی موفق جهت توصیف خواص ماده هسته‌ای، خواص حالت پایه هسته‌ها در سرتاسر جدول تناوبی و همچنین توصیف پراکندگی در انرژی‌های متوسط است. با این مدل برخی از خواص هسته‌ها از جمله، انرژی بستگی، شعاع هسته‌ای و تغییر شکل‌های حالت پایه به خوبی توصیف می‌شوند. توزیع چگالی‌های هسته‌های کروی دو-بار-جادویی که از این مدل محاسبه شده‌اند در توافق خوبی با داده‌های پراکندگی الکترون از هسته است. همچنین علاوه بر خواص حالت پایه هسته‌های کروی، طیف تک ذره هسته‌های فرد مجاور هسته‌های کروی نیز با این روش به خوبی به دست آمده است. این مدل دارای مزیت‌های مهمی است، از جمله آن که از همان ابتدا اثرات نسبیتی را وارد می‌کند که در میان آن‌ها می‌توان به وجود دو نوع پتانسیل اسکالر و برداری و ظهور خودبه‌خود جمله اسپین-مدار یا جواب‌های مربوط به پاد ذرات اشاره کرد. به علاوه، تعداد پارامترهای مورد استفاده در این مدل کمتر و کاربرد آن نسبت به مدل‌های غیرنسبیتی آسان‌تر است [۱].

در این مدل، نوکلئون‌ها به صورت اسپینورهای دیراک در نظر گرفته می‌شوند و مزون‌ها مسئول برهم‌کنش بین نوکلئون‌ها هستند. تعداد این مزون‌ها، مقدار جرم آنها و جفت شدگی‌های مزون‌ها با نوکلئون‌ها، طوری تعیین می‌شود که نتایج مدل با داده‌های تجربی همخوانی خوبی داشته باشد. مقدار این پارامترها در داخل هسته، لزوماً با مقدارشان در فضای آزاد برابر نیست، چرا که در هسته با یک مساله بس ذره‌ای سروکار داریم و آن چه به دست می‌آید نتیجه تأثیر و تأثر ذرات و میدان‌ها است. برهم‌کنش‌های میان نوکلئون‌ها در هسته شامل جاذبه، دافعه، برهم‌کنش وابسته به ایزواسپین و



برهم‌کنش الکترومغناطیسی است که به ترتیب برای آن‌ها مزون‌های σ ، ω ، ρ و فوتون وارد مدل می‌شوند. میدان متناظر با مزون σ ، میدان اسکالر $\sigma(x)$ است که نقش نیروی جاذبه میان نوکلئون‌ها را برعهده دارد. مزون برداری $\vec{\omega}$ موجب پیدایش میدان برداری $\vec{\omega}^\mu(x)$ می‌شود. این میدان دافعه میان نوکلئون‌ها را ایجاد می‌کند. این نیروی دافعه، با نیروی دافعه کولنی تفاوت دارد. مزون‌های ρ ، میدان ایزوبرداری $\vec{\rho}^\mu(x)$ را ایجاد می‌کنند این میدان، اثر عدم تقارن را به خوبی توصیف می‌کند. دافعه کولنی به وسیله مولفه زمانی پتانسیل برداری $A^\mu(x)$ توصیف می‌شود که مربوط به تبادل فوتون میان نوکلئون‌هاست. در اصل می‌توان تعداد بیشتری از مزون‌ها را در مدل تبادل مزونی و در توصیف کمی نیروی نوکلئون - نوکلئون وارد مدل کرد اما از آن صرف‌نظر می‌شود، چرا که میدان‌های مربوط به آن‌ها برای توصیف خواص حالت پایه کم اهمیت هستند. همچنین اثرات آن‌ها را می‌توان با تنظیم مناسب پارامترها در بقیه مزون‌ها لحاظ کرد [۲].

در مدل میدان میانگین نسبی از تقریب میدان میانگین استفاده می‌شود به این معنا که تمام افت و خیزهای میدان‌های مزونی حذف و از مقدار چشم‌داشتی آن استفاده می‌شود، بنابراین میدان‌ها به صورت کلاسیک در نظر گرفته می‌شوند. نقطه شروع مدل، لاگرانژی زیر شامل درجات آزادی نوکلئونی و مزونی است [۳].

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\Psi}(i\gamma_\mu \partial^\mu - M)\Psi + \frac{1}{2}\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - \frac{1}{2}m_\sigma^2 \sigma^2 - \frac{1}{3}g_2 \sigma^3 - \frac{1}{4}g_3 \sigma^4 \\ & - \frac{1}{4}\Omega_{\mu\nu}\Omega^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu - \frac{1}{4}\vec{R}_{\mu\nu}\vec{R}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_\rho^2 \vec{\rho}_\mu \vec{\rho}^\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ & - g_\sigma \bar{\Psi}\sigma\Psi - g_\omega \bar{\Psi}\gamma_\mu \omega^\mu \Psi - g_\rho \bar{\Psi}\gamma_\mu \vec{\tau} \vec{\rho}^\mu \Psi - e \bar{\Psi}\gamma_\mu A^\mu \Psi \end{aligned} \quad (1)$$

در اینجا M جرم نوکلئون و m_σ ، m_ω ، m_ρ جرم مزون‌ها هستند. g_σ ، g_ω ، g_ρ و e جفت شدگی‌های متناظر برای مزون‌ها و فوتون با نوکلئون‌ها را نشان می‌دهند و g_2 و g_3 خود جفت شدگی‌های میدان σ هستند. تانسورهای میدان‌های مزونی و فوتون به صورت زیر نوشته می‌شوند،

$$\Omega^{\mu\nu} = \partial^\mu \omega^\nu - \partial^\nu \omega^\mu \quad (2)$$

$$\vec{R}^{\mu\nu} = \partial^\mu \vec{\rho}^\nu - \partial^\nu \vec{\rho}^\mu \quad (3)$$

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (4)$$

با استفاده از لاگرانژی (۱) و کاربرد معادله اوایلر-لاگرانژ، معادله دیراک برای نوکلئون‌ها و معادلات کلاین-گوردن برای میدان‌های مزونی به دست می‌آید. چون حالت‌های ایستا در هسته‌ها مورد نظر است و ناوردایی تحت وارونی زمان وجود دارد همه مشتق‌های زمانی و همه مولفه‌های برداری صفر می‌شوند. همچنین فرض می‌شود تعداد پروتون‌ها و نوترون‌ها ثابت و بقای بار الکتریکی برقرار است و در نتیجه تنها مولفه سوم ایزواسپین باقی می‌ماند. به علاوه حالتی را در نظر می‌گیریم که تقارن کروی برقرار باشد. که در این صورت تنها کافیست جواب‌های بخش شعاعی معادلات را پیدا کنیم. با



شرایطی که بیان شد معادله دیراک به یک دستگاه معادلات جفت شده مرتبه اول برای مولفه‌های بالا و پایین اسپینور دیراک تبدیل می‌شود.

$$(\partial_r - (k_i - 1)r^{-1})g_i(r) + (M^*(r) + V(r) - \epsilon_i)f_i(r) = 0 \quad (5)$$

$$(\partial_r + (k_i + 1)r^{-1})f_i(r) + (M^*(r) - V(r) + \epsilon_i)g_i(r) = 0 \quad (6)$$

در روابط فوق، $f_i(r)$ و $g_i(r)$ ، به ترتیب بخش‌های شعاعی مولفه‌های بالا و پایین اسپینور دیراک هستند. ϵ_i انرژی تک ذره متناظر با اسپینور است. k_i ها دربردارنده اسپین و تکانه زاویه‌ای مداری هستند. $M^*(r)$ جرم موثر و $V(r)$ پتانسیل برداری را نشان می‌دهند و به صورت زیر به دست می‌آیند،

$$M^*(r) = M + g_\sigma \sigma(r) \quad (7)$$

$$V(r) = g_\omega \omega^0(r) + g_\rho \tau_3 \rho_3^0(r) + \frac{1}{2} e(1 - \tau_3) A^0(r) \quad (8)$$

معادلات کلاین - گوردن به شکل زیر نوشته می‌شوند،

$$[-\partial_r^2 - 2r^{-1}\partial_r + m_\sigma^2]\sigma = -g_\sigma \rho_s - g_2 \sigma^2 - g_3 \sigma^3 \quad (9)$$

$$[-\partial_r^2 - 2r^{-1}\partial_r + m_\omega^2]\omega^0 = g_\omega \rho_v \quad (10)$$

$$[-\partial_r^2 - 2r^{-1}\partial_r + m_\rho^2]\rho_3^0 = g_\rho \rho_3 \quad (11)$$

$$[-\partial_r^2 - 2r^{-1}\partial_r]A^0 = e\rho_c \quad (12)$$

چگالی‌های ρ_s ، ρ_v ، ρ_3 و ρ_c از روابط زیر به دست می‌آیند،

$$\rho_s = (4\pi)^{-1} \sum_i (2j_i + 1) n_i (|f_i|^2 - |g_i|^2) \quad (13)$$

$$\rho_v = (4\pi)^{-1} \sum_i (2j_i + 1) n_i (|f_i|^2 + |g_i|^2) \quad (14)$$

$$\rho_3 = (4\pi)^{-1} \sum_i (2j_i + 1) n_i \tau_3 (|f_i|^2 + |g_i|^2) \quad (15)$$

$$\rho_s = (8\pi)^{-1} \sum_i (2j_i + 1) n_i (1 - \tau_3) (|f_i|^2 + |g_i|^2) \quad (16)$$

در روابط فوق برای پروتون‌ها $\tau_3 = -1$ ، برای نوترون‌ها $\tau_3 = +1$ و j_i تکانه زاویه‌ای هر حالت است. ضرب $(2j_i + 1)$ به دلیل تبهگنی حالت کروی ظاهر می‌شود. جمع بندی روی حالت‌های اشغال شده صورت می‌گیرد و n_i عدد اشغال هر حالت است که از رابطه زیر به دست می‌آید،

$$n_i = \frac{1}{2} (1 - (\epsilon_i - \lambda)((\epsilon_i - \lambda)^2 + \Delta^2)^{-\frac{1}{2}}) \quad (17)$$

در رابطه اخیر، Δ گپ زوجیت در دمای صفر است که از تفاوت جرم هسته‌های زوج-فرد مجاور هسته مورد مطالعه محاسبه می‌شود و λ پتانسیل شیمیایی است که با شرط زیر به دست می‌آید،

$$\sum_i (2j_i + 1) n_i = Z(N) \quad (18)$$



در اینجا Z تعداد پروتون‌ها و N تعداد نوترون‌ها را نشان می‌دهد.

حل عددی معادلات (۱۸)–(۵) به صورت خودسازگار، اطلاعات لازم را برای محاسبه برخی ویژگی‌های هسته‌های کروی فراهم می‌آورد. با داشتن این اطلاعات و استفاده از روابط مرجع [۴] می‌توان انرژی نوکلئون‌ها، میدان‌های مزونی، کولنی، زوجیت و بستگی را به دست آورد. برای حل معادلات میدان میانگین نسبیتی روش‌های گوناگونی وجود دارد.

روش انجام کار:

در این تحقیق معادله دیراک و همچنین معادلات کلاین-گوردن با بسط در یک پایه مناسب حل می‌شوند. برای هر دو حالت از مجموعه کامل ویژه جواب‌های پتانسیل نوسانگر هماهنگ کروی (R_{nl}) استفاده می‌شود. بسط قسمت‌های شعاعی اسپینورهای دیراک بر حسب R_{nl} ها و استفاده از تعامد این توابع، حل معادله دیراک را به مساله قطری کردن ماتریس زیر تبدیل می‌کند،

$$\begin{pmatrix} A_{n,\bar{n}} & B_{n,\bar{n}} \\ B_{\bar{n},n} & -C_{\bar{n},n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{\bar{n}}^{(i)} \\ g_{\bar{n}}^{(i)} \end{pmatrix} = \epsilon_i \begin{pmatrix} f_n^{(i)} \\ g_n^{(i)} \end{pmatrix} \quad (19)$$

عناصر ماتریسی ماتریس مربعی بالا به شکل زیر نوشته می‌شوند،

$$A_{n,\bar{n}} = N_{nl_i} N_{\bar{n}l_i} \int_0^\infty dx e^{-x^2} x^{2l_i+2} L_{n-1}^{l_i+1/2}(x^2) L_{\bar{n}-1}^{l_i+1/2}(x^2) (M^*(b_0x) + V(b_0x)) \quad (20)$$

$$C_{\bar{n},n} = N_{\bar{n}l_i} N_{nl_i} \int_0^\infty dx e^{-x^2} x^{2\bar{l}_i+2} L_{\bar{n}-1}^{\bar{l}_i+1/2}(x^2) L_{n-1}^{\bar{l}_i+1/2}(x^2) (M^*(b_0x) - V(b_0x)) \quad (21)$$

$$B_{\bar{n},n} = N_{\bar{n}l_i} N_{nl_i} b_0^{-1} \left[\int_0^\infty dx e^{-x^2} x^{\bar{l}_i+l_i+1} L_{\bar{n}-1}^{\bar{l}_i+1/2}(x^2) L_{n-1}^{l_i+1/2}(x^2) (x^2 + l_i - k_i) \right. \\ \left. - \int_0^\infty dx e^{-x^2} x^{\bar{l}_i+l_i+1} L_{\bar{n}-1}^{\bar{l}_i+1/2}(x^2) L_{n-1}^{l_i-1/2}(x^2) (2\bar{n} + 2l_i - 1) \right] \quad (22)$$

$$B_{n,\bar{n}} = N_{nl_i} N_{\bar{n}l_i} b_0^{-1} \left[\int_0^\infty dx e^{-x^2} x^{\bar{l}_i+l_i+1} L_{n-1}^{l_i+1/2}(x^2) L_{\bar{n}-1}^{\bar{l}_i+1/2}(x^2) (-x^2 - \bar{l}_i - k_i) \right. \\ \left. + \int_0^\infty dx e^{-x^2} x^{\bar{l}_i+l_i+1} L_{n-1}^{l_i+1/2}(x^2) L_{\bar{n}-1}^{\bar{l}_i-1/2}(x^2) (2\bar{n} + 2\bar{l}_i - 1) \right] \quad (23)$$

در اینجا N_{nl} ضرایب نرمالیزاسیون توابع نوسانگر هماهنگ کروی و L_n^m ها توابع وابسته لاگر هستند. b_0 طول نوسانگر و $x = r/b_0$ است. l_i و \bar{l}_i ، با j_i و پاریته مشخص می‌شوند. اگر $(-1)^{j_i+1/2}$ پاریته درست را بدهد آنگاه $l_i = j_i + 1/2$ و $\bar{l}_i = j_i - 1/2$ و برعکس. اگر $k_i > 0$ ، $l_i = k_i$ و اگر $k_i < 0$ آنگاه $l_i = -k_i - 1$. با قطری کردن ماتریس رابطه (۱۹) ϵ_i ها، $f_n^{(i)}$ ها و $g_n^{(i)}$ ها را پیدا می‌کنیم. با داشتن انرژی‌های تک ذره و حل همزمان روابط (۱۷) و (۱۸)، اعداد اشغال و پتانسیل شیمیایی محاسبه می‌شود. در نتیجه می‌توانیم چگالی‌ها را به دست آوریم. با قرار دادن چگالی‌ها در روابط (۱۲)–(۹) معادلات کلاین-گوردن را حل می‌کنیم. برای حل معادلات کلاین-گوردن روابط (۱۱)–(۹)، میدان‌ها و چشمه‌های هر رابطه را بر حسب R_{nl} ها با $(l = 0)$ بسط می‌دهیم. با انجام محاسبات لازم، در



نهایت برای هر معادله کلاین-گوردن به یک دستگاه معادلات می‌رسیم که حل آن، ضرایب بسط را در اختیار ما قرار می‌دهد. برای حل معادله (۱۲) از روش بسط استفاده نمی‌کنیم زیرا همگرایی برای رسیدن به جواب در این روش کند است و در نتیجه برای یافتن جواب معادله (۱۲) از تابع گرین استفاده می‌کنیم.

نتایج:

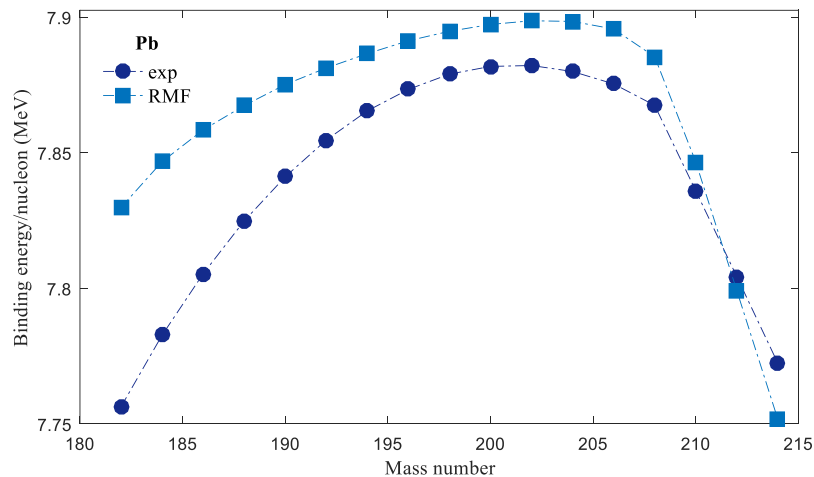
برای انجام این تحقیق مبادرت به نوشتن کدی کردیم که مطابق آنچه در قسمت قبل توضیح داده شد، معادلات میدان میانگین را به صورت خودسازگار بر پایه بسط برحسب جوابهای نوسانگر هماهنگ حل کند. انرژی های نوکلئونی، انرژی میدان های مزونی، میدان کولنی، مرکز جرم و زوجیت را محاسبه و در نهایت انرژی بستگی بر نوکلئون، برای ایزوتوپ های زوج-زوج سرب ($A = 182 - 214$) را به دست آوردیم. جدول شماره (۱) سهم همه انرژی های موثر در انرژی بستگی را نشان می دهد. انرژی مرکز جرم که برای ایزوتوپ های مورد تحقیق، تقریباً ثابت است، را در جدول ثبت نکرده ایم. اگر ΔE اختلاف میان بیشترین و کمترین مقدار هر انرژی باشد، اعداد به دست آمده نشان می دهند که در میان میدان ها، به ترتیب میدان σ با $\Delta E = 3541.1 (MeV)$ ، میدان ω با $\Delta E = 2966.5 (MeV)$ ، میدان ρ با $\Delta E = 118.8 (MeV)$ و میدان کولنی با $\Delta E = 27.4 (MeV)$ بیشترین تغییرات را در محدوده ایزوتوپ های مورد مطالعه داشته اند. لازم به ذکر است که در محاسبه تغییرات انرژی میدان σ ، سهم خود جفت شدگی این میدان نیز لحاظ شده است. توجه داریم که به جز انرژی زوجیت که دارای اکسترم است در محدوده مورد مطالعه، روند تغییرات بقیه انرژی های سهم در انرژی بستگی، همواره صعودی یا نزولی است. همچنین کمترین انرژی زوجیت مربوط به هسته ^{208}Pb است.

جدول شماره (۱)- انرژی های ذرات، میدان های مزونی، میدان کولنی و انرژی زوجیت برای برخی ایزوتوپ های زوج-زوج سرب محاسبه شده است. انرژی ها برحسب مگا الکترون ولت نوشته شده اند.

A	E_{particle}	E_{σ}	$E_{\sigma\text{NL}}$	E_{ω}	E_{ρ}	E_{Coulomb}	E_{pairing}	E/A
182	-4159.8	26196.1	-517.4	-22053.1	-26.3	-844.4	-14.51	-7.8298
184	-4213.4	26457.7	-522.8	-22270.8	-31.3	-842.9	-14.78	-7.8466
186	-4266.7	26722.6	-528.9	-22490.0	-36.7	-841.3	-15.23	-7.8584
188	-4320.0	26989.5	-535.1	-22710.3	-42.5	-839.6	-15.50	-7.8673
190	-4373.2	27257.8	-541.4	-22931.6	-48.8	-837.9	-15.69	-7.8751
192	-4425.8	27524.6	-547.6	-23151.5	-55.5	-836.2	-15.74	-7.8812
194	-4477.5	27789.7	-553.8	-23369.8	-62.6	-834.5	-15.97	-7.8865
196	-4529.8	28058.4	-560.0	-23591.0	-70.1	-832.9	-15.79	-7.8912
198	-4580.7	28321.7	-566.1	-23807.8	-77.9	-831.3	-15.61	-7.8947
200	-4630.4	28578.8	-572.0	-24019.4	-85.9	-829.8	-15.21	-7.8972
202	-4679.0	28831.0	-577.7	-24227.2	-94.2	-828.4	-14.50	-7.8986

204	-4725.7	29072.8	-583.1	-24426.2	-102.7	-827.0	-13.84	-7.8984
206	-4770.4	29304.3	-588.3	-24616.6	-111.4	-825.7	-13.00	-7.8956
208	-4811.1	29516.8	-594.0	-24789.7	-120.2	-824.1	-12.52	-7.8853
210	-4834.2	29637.9	-601.8	-24879.4	-128.2	-821.9	-14.87	-7.8465
212	-4854.4	29738.3	-610.2	-24949.7	-136.5	-819.5	-16.12	-7.7991
214	-4874.5	29838.5	-618.7	-25019.6	-145.1	-817.0	-17.13	-7.7517

انرژی بستگی بر نوکلئون در برخی ایزوتوپ‌های سرب که با استفاده از مدل میدان میانگین نسبیتی محاسبه شده‌اند، در شکل (۱) رسم شده است. در این شکل، مقادیر تجربی انرژی بستگی با دایره نشان داده شده‌اند. همانطور که ملاحظه می‌شود، مقادیر محاسباتی و تجربی در محدوده $A=212$ تطابق خوبی دارند ولی با کاهش تعداد نوترون‌ها، نتایج تا حداکثر ۷۳ کیلو الکترون ولت با مقادیر تجربی اختلاف پیدا می‌کنند.



شکل (۱) - انرژی بستگی بر نوکلئون برخی ایزوتوپ‌های زوج-زوج سرب با استفاده از مدل هسته‌ای میدان میانگین نسبیتی محاسبه شده است. نتایج محاسباتی با مربع و نتایج تجربی [۵] با دایره نشان داده شده است.

بحث و نتیجه‌گیری:

انرژی بستگی بر نوکلئون تعدادی از ایزوتوپ‌های زوج-زوج سرب بر پایه مدل هسته‌ای میدان میانگین نسبیتی محاسبه شد. نتایج محاسباتی با مقادیر تجربی برای ایزوتوپ‌های پایدار توافق بسیار خوبی داشت. اما با دور شدن از ایزوتوپ‌های پایدار، نتایج محاسباتی با مقادیر تجربی اختلاف بیشتری پیدا کرد. برای بهتر شدن جوابهای محاسباتی، می‌بایست برخی تصحیحات نظیر جملات غیرخطی برای میدان‌های ω و ρ را وارد محاسبات کرد.



مراجع:

1. T. Niksic, N. Paar, D. Vretenar, P. ring, DIRHB-A relativistic self-consistent mean-field framework for atomic nuclei, Computer Physics Communications 185, 6, 1808-1821, (2014).
2. P. Ring, Y.K. Gambhir, and G.A. Lalazissis, Computer program for the relativistic mean field description of the ground state properties of even-even axially deformed nuclei, Computer Physics Communications 105, 1, 77-97 (1997).
3. Y.K. Gambhir, P. ring, and A. Thimet, Relativistic mean field theory for finite nuclei, Annals of Physics, 198, 1, 132-179, (1990).
4. B.K. Agrawal, T. Sil, J.N. De, S.K. Samaddar, nuclear shape transition at finite temperature in a relativistic mean field approach, Physical Review C, 62, 4, 044307-044324, (2000).
5. <https://www-nds.iaea.org/relnsd/vcharthtml/VChartHTML.html>