



توان تفکیک جرمی دام چهار قطبی پائول در محصورسازی یون‌های گازی UF_6 در اثر پتانسیل بار فضایی

پیش‌بین، نوشین* - سادات کیایی، سید محمود - یورتچی، پروین - الهی، مجید - شفافی، سیدرضا

سازمان انرژی اتمی - پژوهشگاه علوم و فنون هسته‌ای - پژوهشکده پلاسما و گداخت هسته‌ای

چکیده: این پژوهش با هدف تعیین اثر پتانسیل بار فضایی بر مشخصه‌های یون‌های محصور شده گازی UF_6 در دام یونی پائول انجام شده است. بدین منظور ابتدا ساختار معادلات حرکت یون در دام بررسی شده و در ادامه با تعیین اثر بار فضایی بر نمودارهای پایداری، تغییر حساسیت و توان تفکیک دام به صورت تئوری و عددی تعیین شده است. کلمات کلیدی: دام یونی چهار قطبی پائول، پتانسیل بار فضایی، توان تفکیک جرمی، یون گازی UF_6

مقدمه:

بیشتر راکتورهای تجاری هسته‌ای در جهان برای سوخت خود نیاز به اورانیوم غنی شده در ایزوتوپ ^{235}U دارند. اورانیوم موجود در طبیعت متشکل از دو ایزوتوپ ^{235}U و ^{238}U است. منظور از غنی سازی اورانیوم، افزایش غلظت ایزوتوپ ^{235}U در ترکیب ساختار شیمیایی UF_6 است. اختلاف جرم ایزوتوپ‌های ^{235}U و ^{238}U مبنای جداسازی و فرایند غنی سازی ^{235}U است. روش‌های مختلفی برای اندازه‌گیری نسبت ایزوتوپ اورانیم وجود دارد که مهم‌ترین این روش‌ها عبارتند از: طیف‌سنجی نشر نوری پلاسما، جفت‌شده‌ی القایی^۱، طیف‌سنجی آلفا، طیف‌سنجی گاما^۲، فعال‌سازی نوترون^۳ و طیف‌سنجی جرمی^۴. طیف‌سنجی جرمی یکی از روش‌های دقیق اندازه‌گیری مخرب است که از سال‌ها پیش جهت تشخیص ایزوتوپ‌های اورانیوم در ترکیب شیمیایی UF_6 مورد توجه قرار گرفته است. در سال ۱۹۰۱ والتر کافمن^۵ برای نخستین بار از یک طیف‌سنج جرمی برای اندازه‌گیری افزایش جرم نسبی الکترون‌ها استفاده کرد [۱]. پس از آن در سال ۱۹۱۳ تامسون قادر به جداسازی ذرات با نسبت جرم به بار متفاوت شد. او توانست ایزوتوپ‌های ^{20}Ne و ^{22}Ne را از یکدیگر تمیز دهد [۲]. کاربردهای طیف‌سنج جرمی شامل دو دسته کاربردهای کیفی (تعیین وزن مولکولی، تعیین فرمول مولکولی، اطلاعات ساختاری از روی الگوی قطعه قطعه شدن، شناسایی ترکیبات توسط مقایسه طیف‌ها و شناسایی و

¹ Inductively Coupled Plasma-Optical Emission

² Alpha Spectrometry

³ Gamma Spectrometry

⁴ Neutron Activation

⁵ Mass Spectrometry

⁶ Walter Kaufmann



تعیین اجزاء ترکیب) و کاربردهای کمی (تعیین غلظت‌های ملکولی، تعیین ترکیب عنصری نمونه‌های معدنی و آلی و حیاتی و تعیین کمی گونه‌های مولکولی یا اتمی بر روی سطوح جامدات) هستند. آنالیزور طیف‌سنج جرمی بسته به نوع استفاده و کاربرد آن در طیف‌سنج جرمی به دو نوع پالسی و پیوسته تقسیم می‌شوند. آنالیزور پالسی از نسبت سیگنال به نویز (S/N) بالایی برخوردار است و بدین جهت می‌تواند طیف جرمی تمام یون‌ها را جمع‌آوری کند. دام یونی چهار قطبی پائول از مهم‌ترین انواع آنالیزور پالسی در طیف‌سنج جرمی است که علاوه بر تعیین پارامترهای اصلی طیف‌سنج از قبیل حساسیت و توان تفکیک، نوع طیف‌سنج جرمی را نیز مشخص می‌کند. این آنالیزور اولین بار توسط ولفگانگ پائول^۷ فیزیکدان آلمانی مطرح شد [۳]. روش‌های محصورسازی یون در یک دام یونی شامل محصورسازی الکتروستاتیکی، محصورسازی مغناطیسی یکنواخت، محصورسازی الکترومغناطیسی یکنواخت و محصورسازی الکترودینامیکی هستند. بنابراین با توجه به مشخصه‌های دام یونی پائول و وسعت کاربردهای آن، مطالعات و تحقیقات زیادی در این زمینه انجام و نتایج حاصل از آن ارائه شده است [۴-۸]. در فرایند محصورسازی یون‌ها در دام یونی پائول، شار فضایی ناشی از برهم‌کنش کولنی یون‌ها عامل مهم و تأثیرگذاری بر تعداد، طول عمر و قدرت تفکیک یون‌های محصور شده در دام است. لذا مطالعه و بررسی این مهم مورد توجه محققان زیادی قرار گرفته است [۹-۱۵]. پیش‌بین و همکارانش نیز [۱۶] در سال ۲۰۱۹ اثر پتانسیل بار فضایی در دام یونی چهار قطبی پائول را به طور عددی و تئوری مورد بررسی قرار دادند. در این پژوهش با استفاده از نتایج بدست آمده در پژوهش انجام شده [۱۶] و با بررسی معادلات حرکت و نمودارهای پایداری یون‌های UF_6 در حضور و غیاب اثر بار فضایی، توان تفکیک جرمی دام یونی پائول مورد مطالعه قرار می‌گیرد و دیاگرام پایداری برای یون‌های گازی $^{235}UF_6$ و ^{235}U در غیاب و حضور بار فضایی بدست می‌آید.

تئوری:

دام یونی چهار قطبی متشکل از سه الکتروود با هندسه هذلولوی است که دو الکتروود آن مشابه و به شکل بشقاب‌های کوچک وارونه در بخش‌های بالایی و پایینی قرار گرفته و الکتروودهای کلاهدک^۸ نامیده می‌شوند. الکتروود سوم به طور متقارن بین دو الکتروود کلاهدک قرار دارد و الکتروود حلقه^۹ نامیده می‌شود. نحوه قرارگیری این الکتروودها منجر به شکل‌گیری پتانسیل چهارقطبی در دام یونی می‌شود. با به‌کارگیری مختصات استوانه‌ای و استفاده از تبدیل‌های استاندارد $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z$ و در نظر گرفتن نیروی ناشی از پتانسیل الکتروستاتیک، حرکت یون‌ها در میدان‌های چهار قطبی به طور ریاضی با معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم ماتیهو^۱ [۱۷] شرح داده می‌شود [۶].

⁷ Wolfgang Paul

⁸ End cap

⁹ Ring

¹ Mathieu



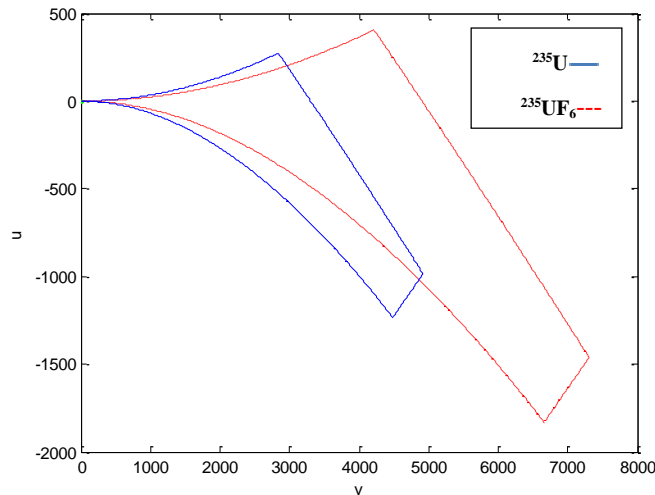
$$(۱) \frac{d^2 u}{d\xi^2} + (a_u - 2q_u \cos 2\xi)u = 0$$

که در آن، u بیانگر مختصات r و z در مختصات استوانه‌ای است، ξ یک پارامتر بدون بعد و برابر است با $\frac{\Omega t}{\gamma}$ ، Ω فرکانس زاویه‌ای میدان RF و a_u و q_u پارامترهای بدون بعد دام یونی و برابر هستند با:

$$(۲) \quad a_z = \frac{-16eU}{m(r_z^2 + 2z_z^2)\Omega^2} = -2a_r$$

$$q_z = \frac{16eV}{m(r_z^2 + 2z_z^2)\Omega^2} = -2q_r$$

که در آن، m جرم و e بار یون، r_0 شعاع الکتروود حلقه در صفحه مرکزی و $2z_0$ جدایی دو الکتروود کلاهیک در امتداد محور دام یونی، V دامنه پتانسیل RF و U پتانسیل DC اعمال شده به الکتروود حلقه است. قابل توجه است که در یک شرایط ایده‌آل میدان چهار قطبی، $r_z^2 = 2z_z^2$ [۱۸]. معادله ماتیو به روش رونگ کوتاه مرتبه ۴ حل [۱۹] و در نهایت پاسخ آن برحسب پارامترهای بی بعد a و q بیان می‌شود. پایداری و یا ناپایداری حرکت یون‌های محصور شده تنها به پارامترهای a و q بستگی دارد و از پارامترهای اولیه حرکت نظیر سرعت یون مستقل است. نواحی پایدار اول، دوم، سوم و بالاتر یون‌های محصور شده در فضای (a, q) را می‌توان در پژوهش‌های منتشر شده مشاهده کرد [۲۰]. با توجه به رابطه موجود بین پارامترهای بی بعد a_u و q_u و پتانسیل‌های DC و RF اعمال شده به الکتروودهای دام، شکل ۱ اولین ناحیه پایداری را برای UF_7 و U^{235} در فضای (U, V) نشان می‌دهد. ناحیه پایداری اول به دلیل داشتن مساحت بیشتر نسبت به نواحی بالاتر، از اهمیت بیشتری برخوردار است و تغییر اندک در ولتاژ، یون را از این ناحیه پایداری خارج نمی‌کند. نواحی پایداری بالاتر برای به دام اندازی آن دسته از یون‌هایی صورت می‌گیرد که دارای انرژی جنبشی بالاتری هستند و نیاز به ولتاژ بالاتر دارند [۲۱ و ۲۲].



شکل ۱. اولین ناحیه پایداری در فضای (U, V) برای ^{235}U و $^{235}\text{UF}_6$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، با اضافه شدن فلوتور به اورانیوم، مرز پایداری برای بیرون انداختن یون از دام یونی افزایش می‌یابد. اگر نقطه کاری در نمودار UV در محدوده پایداری انتخاب شود، حرکت یون پایدار خواهد بود.

یون‌های محصور شده در دام یونی به دلیل برهم‌کنش‌های کولنی از یکدیگر اثر می‌پذیرند و این امر منجر به جابجایی نمودار پایداری یون‌ها و به دنبال آن، اثراتی همچون افزایش انرژی جنبشی یون‌ها و فرار آن‌ها از دام، کاهش حساسیت و قدرت تفکیک دام یونی و کاهش طول عمر یون‌های محصور شده می‌شود که در ادامه این پژوهش، مورد بحث قرار می‌گیرند.

با اعمال اثر بار فضایی در معادلات حرکت یون و با فرض اینکه فرکانس Ω میدان از فرکانس نوسان ذره بزرگتر باشد [۲۳] و نیز برقراری شرایط ایده‌آل $r_z^2 = 2z^2$ [۱۸]، در نهایت پارامترهای بی‌بعد q و a در معادله ماتئو، به شکل زیر حاصل می‌شوند [۱۶]:

$$a_r = a_{r_0} + a_{rsc}$$

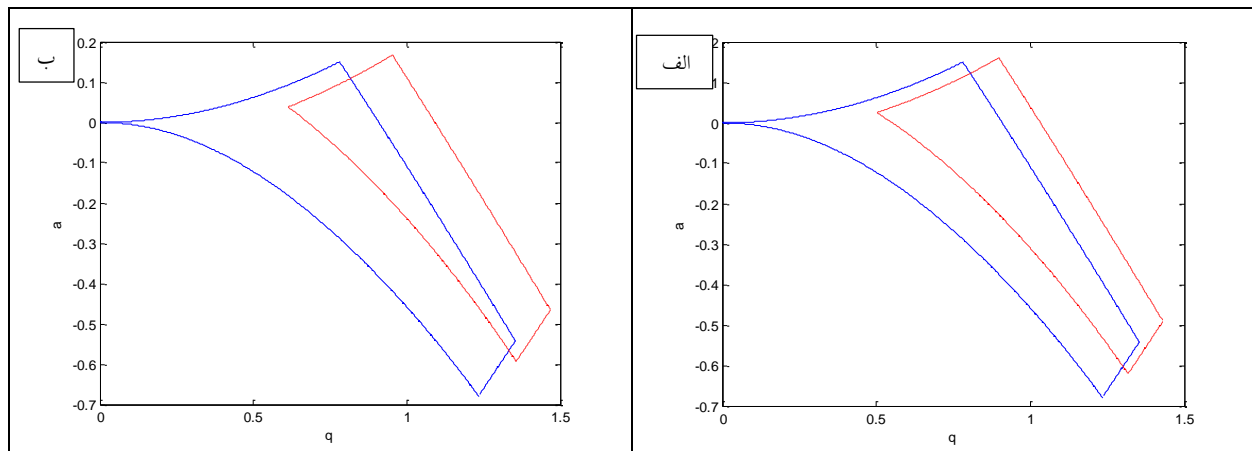
$$(۳) \quad a_{r_0} = \frac{4ZeU_i}{mr^2\Omega^2} \quad \& \quad a_{rsc} = -\frac{2Ze\rho_i}{3m\varepsilon_0\Omega^2}$$

$$a_z = a_{z_0} + a_{zsc}$$

$$(۴) \quad a_{z_0} = -\frac{4ZeU_i}{mr^2\Omega^2} \quad \& \quad a_{zsc} = -\frac{4Ze\rho_i}{3m\varepsilon_0\Omega^2}$$

$$a_{rsc} = \frac{1}{4} a_{zsc}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، با اعمال اثر بار فضایی تنها پارامتر a_{II} تغییر کرده است. جابجایی مرزهای پایداری در ناحیه پایداری اول ناشی از اعمال اثر بار فضایی برای ^{235}U و $^{235}\text{UF}_6$ در فضای (a_z, q_z) در شکل ۲ نشان داده شده است.



شکل ۲. جابجایی مرزهای پایداری ناحیه پایداری اول ناشی از اعمال اثر بار فضایی برای یون‌های الف ($^{235}\text{UF}_6$) و ب (^{235}U) محصور شده در دام یونی چهار قطبی در فضای (a_z, q_z) در شرایط اولیه: $N_i = 10^{10} / \text{m}^3$, $z = 0.707 \text{ cm}$, $\theta = 10^\circ$. در هر دو قسمت الف و ب، نمودار خط چین با اعمال اثر بار فضایی و نمودار پیوسته در غیاب اثر بار فضایی حاصل شده است.

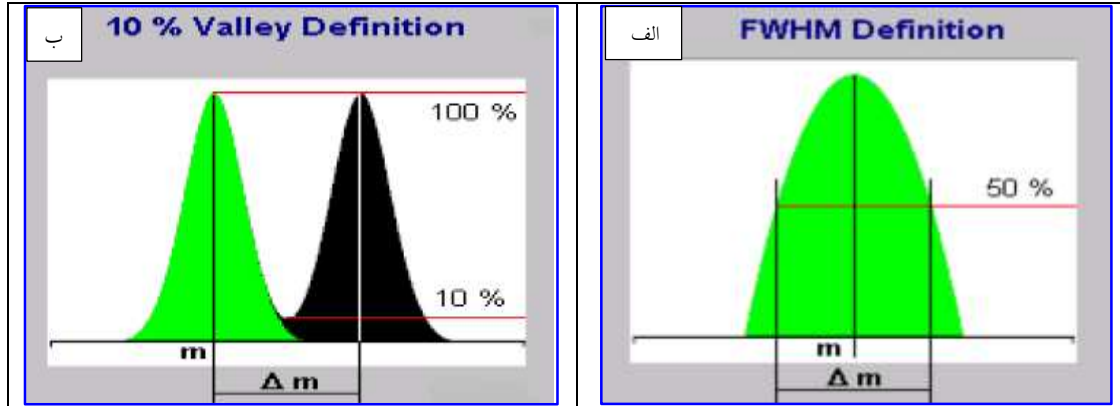
توان تفکیک اجرمی

توان تفکیک جرمی (R) در طیف‌سنج‌های جرمی به صورت نسبت بالاترین دامنه پخش بر عرض منحنی در نصف ارتفاع دره^۲ قله تعریف می‌شود.

$$R = \frac{m}{\Delta m} \quad (5)$$

محاسبه توان تفکیک برای طیف‌های جرمی تک یونی و دو یونی متفاوت است. در روش تک یونی معمولاً از نصف ارتفاع دامنه قله (FWHM) استفاده می‌شود، یعنی $\Delta m = FWHM$ (شکل ۳ الف).

اما در روش دو یونی، برای دو قله با ارتفاع مساوی و جرم‌های m_1 و m_2 که با درصد مشخص شده‌ای (معمولاً ۱۰٪) همپوشانی دارند، منظور از Δm ، اختلاف جرم‌ها در قله است (شکل ۳ ب).



شکل ۳. الف) نمایش تصویری کمیت FWHM؛ ب) نمایش تصویری کمیت Δm برای دو یون به جرم‌های m_1 و m_2

مهم‌ترین عوامل تأثیرگذار در توان تفکیک جرمی طیف سنج عبارتند از: عامل خطی هندسی در به وجود آوردن سطوح فیزیکی دام به صورت هذلولی Δr_0 ، عامل خطی در دامنه ولتاژ فرکانس رادیویی ΔV و عامل خطی در پایداری فرکانس رادیویی $\Delta \Omega$. با توجه به رابطه qz و با فرض صفر بودن a_z ، اثر ناپایداری‌های مکانیکی (Δr_0) و الکترونیکی ($\Delta \Omega$ و ΔV) به شکل زیر در توان تفکیک جرمی وارد می‌شوند:

$$(6) \frac{m}{\Delta m} = \left[\left| \frac{\Delta V}{V} \right| + 2 \left| \frac{\Delta \Omega}{\Omega} \right| + 2 \left| \frac{\Delta z_z}{z_z} \right| \right]^{-1}$$

بنابراین مشاهده می‌کنیم که با کاهش خطاهای مکانیکی و الکترونیکی، می‌توان توان تفکیک جرمی را افزایش داد. امروزه وسایل بسیار دقیقی برای برش فلزات وجود دارند که با استفاده از آن‌ها می‌توان سطوح هذلولی را با دقت بالایی در حد یک هزارم میلی متر تراش داد. ناپایداری‌هایی که مربوط به مدارهای الکترونیکی می‌شوند و عمدتاً ناشی از به کارگیری ولتاژهای ضربه‌ای هستند، امروزه به کمترین مقدار رسیده‌اند. می‌توان حدود دقت‌های مکانیکی و الکترونیکی را به صورت زیر بیان کرد:

$$\frac{\Delta z_z}{z_z} \approx 3 \times 10^{-4}, \frac{\Delta V}{V} \approx 10^{-5}, \frac{\Delta \Omega}{\Omega} \approx 10^{-7}$$

با جایگزینی این خطاها در رابطه، توان تفکیک جرمی در حدود ۱۶۳۹ خواهد بود.

قابل ذکر است که محدوده جرمی قابل اندازه‌گیری در دام یونی چهار قطبی پائول تا 10^4 Da می‌باشد [۲۴]. که در این پژوهش محدوده جرمی اندازه‌گیری شده برای یون‌های گازی UF_6 در بازه (۳۰۰-۴۰۰) Da بوده است.



بار فضایی ناشی از برخورد کولنی ذرات، یکی از مهم‌ترین عوامل تأثیر گذار بر توان تفکیک جرمی در طیف سنج جرمی است. تغییر پارامتر a_u در معادله ماتئو ناشی از اثر بار فضایی، منجر به پدیده جابجایی جرم (Δm) می‌شود که این امر دقت تفکیک پذیری جرم در طیف جرمی را کاهش می‌دهد. به طوری که برای تغییر جرم ناشی از a_{rs} داریم:

$$m = \frac{4ZeU}{a_r r_s^2 \Omega^2}$$
$$m' = \frac{4ZeU}{(a_r + a_{rs}) r_s^2 \Omega^2} \quad (V)$$

$$m' - m = \Delta m$$

میزان جابجایی جرم در اثر پتانسیل بار فضایی، بسیار قابل توجه می‌باشد. به طوری که منجر به کاهش شدید توان تفکیک جرمی و حساسیت طیف‌سنج خواهد شد. لذا خنثی سازی این اثر حتماً باید مورد توجه قرار گیرد. یکی از روش‌های مناسب جهت افزایش توان تفکیک جرمی و کاهش اثر مخرب پتانسیل بار فضایی در دام یونی پائول، بکارگیری تکنیک خنک‌سازی برخوردی با استفاده از تزریق گاز بی‌اثر است. خنک‌سازی یون‌ها، علاوه بر این که بهره‌محصول‌سازی و طول عمر یون‌ها را بالا می‌برد، فرایند جداسازی را نیز کارآمدتر می‌سازد. در روش خنک‌سازی با گاز بی‌اثر، انرژی جنبشی یون‌ها در برخورد با اتم‌های گاز بی‌اثر کاهش می‌یابد و بنابراین یون‌ها به راحتی در مرکز دام محصور می‌شوند. معمولاً با این روش یون‌ها به سرعت سرد می‌شوند، هرچند که دمای آن‌ها هنوز بالا و در حدود $500^\circ C$ است. در روش خنک‌سازی لیزری، دمای یون‌ها تا نزدیک صفر مطلق کاهش می‌یابد. اما استفاده از روش گاز بی‌اثر، کم‌هزینه‌تر و به لحاظ تکنیکی، ساده‌تر و سریع‌تر می‌باشد و نیازی به تجهیزات اضافی ندارد [۲۵].

از دیگر راهکارها برای بالا بردن قدرت تفکیک دستگاه، استفاده از طیف سنج جرمی تمرکز دهنده مضاعف است که دارای میدان الکتریکی است (نمونه قبل از ورود به میدان مغناطیسی از میدان الکتریکی عبور می‌کند). در این نوع طیف سنج، آشکارساز شامل یک شمارشگر است که سیگنال تولیدی حاصل از برخورد یون‌ها به آن را به ثبات داده و یک طیف جرمی ایجاد می‌کند. هر چه طیف جرمی باریکتر باشد، توان تفکیک بالاتر خواهد بود. بنابراین طیف جرمی با توان تفکیک بالا که تنها حاوی تک جرم باشد، تقریباً به صورت خط عمودی است. توان تفکیک جرمی، بیانگر توان جداسازی طیف‌های جرمی نزدیک به هم است.

بحث و نتیجه‌گیری

در این پژوهش ساختار آنالیزور جرمی دام یونی چهار قطبی پائول و تأثیر اعمال اثر بار فضایی بر مشخصه‌های یون‌های محصور شده و دام یونی، بویژه توان تفکیک جرمی، به صورت تئوری و عددی مورد بررسی قرار گرفته شد. دام یون



چهار قطبی مهمترین بخش از یک طیف سنج جرمی را تشکیل می‌دهد که علاوه بر دقت و حساسیت بالا در تفکیک جرم، به عنوان یک ذخیره کننده یون نیز محسوب می‌شود و در آن یون‌های گازی می‌توانند در مدت‌های زمانی چند صد میلی ثانیه محصور شوند. اثر بار فضایی ناشی از برخوردهای کولنی یون‌های محصور شده، بر نمودار پایداری یون‌ها و توان تفکیک جرمی دام مشاهده شد. پتانسیل بار فضایی تعیین کننده بیشینه تعداد یون‌های محصور شده در دام است. علاوه براین، قله طیف‌های جرمی یون‌های محصور شده در اثر اعمال اثر بار فضایی جابجا شده که این خود منجر به کاهش دقت جداسازی دام می‌شود. لذا به منظور مرتفع ساختن اثرات مخرب پتانسیل بار فضایی، شناخت و بررسی دقیق این اثر از اهمیت بسزایی برخوردار است. در این راستا، استفاده از گازهای بی‌اثر به منظور خنثی سازی این اثر، گزینه مناسبی می‌باشد. در اثر برخوردهای الاستیک و غیر الاستیک گاز بی‌اثر با یون‌های محصور شده، انرژی جنبشی یون‌ها کاهش می‌یابد و تمرکز آن‌ها در مرکز چاه پتانسیل دام بیشتر خواهد شد.

مراجع:

- [1] W. Kaufmann, Die Entwicklung des Elektronenbegriffs, *Physikalische Zeitschrift*, **3** (1) (1901) 9–15
- [2] J.J. Thomson Rays of positive electricity, *Classic Chemistry*. Retrieved (2009)-12-01
- [3] G. C. Zhang, J. L. Shen, J. H. Dai, H. J. Zhang, Cooling charged particles in a Paul trap by feedback control. *Phys. Rev. A* **60** (1999) 704.
- [4] R. E. March, R. J. Hughes and J. F. J. Todd, *Quadrupole Storage Mass Spectrometry*. Wiley–Interscience, New York (1989).
- [5] J. F. J. Todd, Ion trap mass spectrometer-past, present, and future (?). *Mass Spectrom .Rev.* **10** (1991) 3.
- [6] R. E. March, J. F. J. Todd, *Quadrupole Ion Trap Mass Spectrometer*, Vol. 165, J. Wiley (2005).
- [7] Abouzar kiyania, M.Abdollahzadeha, S.M.sadat kiaib, and A. R. Zirak, Designing of a Quadrupole Paul Ion Trap, *Journal of Fusion Energy* **30**(4) (2011) 291-293
- [8] P. H. Dawson, *Quadrupole Mass Spectrometry and Its Applications*. Elsevier, Amsterdam (1976).
- [9] K. Avinash, A. K. Agarwal, M. R. Jana, A. Sen, P. K. Kaw, Space charge effects in the Paul trap, *Physics of Plasmas* **4** (1998) 1238
- [10] ShenhengGuan, Alan.G.Marshall, Equilibrium space charge distribution in a quadrupole ion trap, *Journal of the American Society for Mass Spectrometry* **2** (2001) 64-71.
- [11] C. Gao, *Space Charge Effects in Linear Quadrupole Ion Traps*, Peking University, Columbia, Ph.D Thesis (2010).
- [12] P. Mandal, S. Das, D. De Munshi, T. Dutta and M. Mukherjee, Space charge and collective oscillation of ion cloud in a linear Paul trap, *International Journal of Mass Spectrometry* **364**(1) (2014)16.
- [13] K. Avinash, A. K. Agarwal, M. R. Jana, A. Sen, and P. K. Kaw, Space charge effects in the Paul trap, *Physics of Plasmas* **2** (1995) 3569.



- [14] X. Xiong, W. Xu, X. Fang, Y. Deng, Zh. Ouyang, Accelerated Simulation Study of Space Charge Effects in Quadrupole Ion Traps Using GPU Techniques, *J. Am. Soc. Mass Spectrom.* 23 (2012) 1799.
- [15] Hiromi Okamoto, Kunihiro Kojima, Kiyokazu Ito, A compact Paul ion trap for the study of space-charge effects in drift-tube linear accelerators, *Progress of Theoretical and Experimental Physics* 2019 (2019) 093G01
- [16]] N. Pishbin, S. M. Sadat Kiai, M. Elahi, P. Yourtchi, S. R. Shafaei, Effect of Space Charge Potential on the Behavior of Confined Gaseous $^{238}\text{UF}_6$ Ions in Paul Ion Trap, *Journal of Nuclear Science and Technology* (2019) (In Persian)
- [17] J.A. Richards, The Mathieu Equation. In: *Analysis of Periodically Time-Varying Systems. Communications and Control Engineering Series.* Springer, Berlin, Heidelberg (1983).
- [18] R. E. March, An Introduction to Quadrupole Ion Trap Mass Spectrometry, *Journal Of Mass Spectrometry* 32 (1997) 351
- [19] N. W. McLachlan, Theory and application of Mathieu functions. Clarendon. Oxford U.P. (1947). Reprinted by Dover, New York (1964).
- [20] F.G. Major, V.N. Gheorghe, G. Werth, Charged Particle Traps Physics and Techniques of Charged Particle Field Confinement, Springer Berlin Heidelberg New York (2005).
- [21] F.G. Major V.N. Gheorghe G.Werth, Charged Particle Traps Physics and Techniques of Charged Particle Field Confinement, ISBN 3-540-22043-7 Springer Berlin Heidelberg New York.
- [22] Roberto Cöisson, Graziano Vernizzi, Xiaoke Yang, Mathieu Functions and Numerical Solutions of the Mathieu Equation.
- [23] A.V. Gaponov, M.A. Miller, Use of Moving High-Frequency Potential Wells for the Acceleration of Charged Particles, *JETP*, 7 (1958) 515.
- [24] Raymond E. March, John F. J. Todd, Quadrupole Ion Trap Mass Spectrometry, , A JOHN WILEY & SONS, INC., PUBLICATION, 2nd ed (2005).
- [25] S. M. Sadat Kiai, S. Seddighi Chaharborj, M. R. Abu Bakar, I. Fudziahb, Effect of damping force on CIT and QIT ion traps supplied with a periodic impulse voltage form, *journal of Analytical Atomic Spectrometry*, 11 (2011)