محاسبه انرژی بستگی و طول پراکندگی کائون-پروتون با استفاده از معادلات همگن و ناهمگن لیپمن-شوئینگر

تهامی پورزرندی، فرزانه*، حسنوند، مریم
دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی اصفهان ،اصفهان ۸٤۱۵۶۸۳۱۱۱ ،ایران

چکیده: *در این کار با در نظرگرفتن پتانسیل جداپذیر برای برهم‌کنش K^-p، طول پراکندگی و انرژی بستگی K^-p را با استفاده از معادلات همگن و ناهمگن لیپمن-شوئینگر محاسبه نموده و همچنین به جرم و پهنای ذره $\Lambda(1405)$ می‌پردازیم. سپس سعی می‌کنیم یکی از طول‌های پراکندگی گزارش شده توسط نظریه‌پردازان کایرال را با استفاده از پتانسیل جداپذیر پدیده‌شناختی بررسی کنیم.*

کلمات کلیدی: *معادله همگن لیپمن-شوئینگر، معادله ناهمگن لیپمن-شوئینگر، طول پراکندگی، انرژی بستگی، کائون-پروتون*

مقدمه:

در مقاله حاضر قصد داریم طول پراکندگی و انرژی بستگی K^-p را با حل معادلات همگن و ناهمگن لیپمن-شوئینگر به‌دست آوریم. برهم‌کنش دو جسمی $\bar{K}N$ نقش مهمی را در سیستم‌های نوکلئونی حاوی کائون بازی می‌کند[۱].
مطالعات نشان می‌دهد که برهم‌کنش $\bar{K}N$ در نزدیکی آستانه، بسیار قوی[1]و جاذب[2]باشد[۲و۳]. این برهم‌کنش به طور عمده تحت تاثیر تشدید $\Lambda(1405)$ قرار دارد، که این تشدید معمولا به عنوان یک حالت مقید $\bar{K}N$ و یک تشدید در کانال $\Sigma\pi$ در نظر گرفته می‌شود[٤]. طول پراکندگی K^-p، یکی از اطلاعات تجربیِ مهم در نزدیکی آستانه محسوب می‌شود، که می‌توان آن را با اندازه‌گیری جابه‌جایی و پهنای انرژی حالت 1s هیدروژن کائونی به‌دست آورد[۲-٤]. مقدار a_{K^-p}، با فرمول دِزر-ترومن[3]به جابه‌جایی انرژی ϵ و پهنای Γ تراز 1s، به صورت زیر، مرتبط می‌شود[۸و۹]:

$$\epsilon + i\frac{\Gamma}{2} = 2\alpha^3\mu^2 a_{K^-p} \qquad (1)$$

که α، ضریب ساختار ریز و μ جرم کاهش‌یافته K^-p است.

تاکنون جابه‌جایی و پهنای تراز 1s هیدروژن کائونی در آزمایش‌های KEK[۵و٦]، DEAR [۷] و SIDDHARTA[۱۰و۱۱] اندازه‌گیری شده‌است، که دقیق‌ترین این اندازه‌گیری‌ها مربوط به آزمایش SIDDHARTA

[1] attractive
[2] absorptive
[3] Deser-Trueman

بوده است. در بخش تئوری نیز تاکنون نظری‌پردازان بسیاری به روش‌های متفاوتی به محاسبه‌ی طول پراکندگی و همچنین انرژی بستگی کائون–نوکلئون پرداخته‌اند. کیشیموتو [۱۲]، تحقیق در مورد حالت‌های کائون–هسته را در برهم‌کنش (K^{-},p) پیشنهاد می‌کند و آکائیشی و یامازاکی [۱۳] یک حالت مقید هسته‌ای کم‌پهنا $\bar{K}NNN, I = 0$، با انرژی بستگی بیش از ۱۰۰MeV (معادل با $1/6\times10^{-11}$ j) پیش‌بینی می‌کنند. دوتِ[۱٤] و همکاران، در محاسبات هسته سبک، قطبش قابل توجه هسته، ناشی از برهم‌کنش جاذبِ قویِ کائون–هسته، را پیش‌بینی کرده‌اند[۱].

روش کار:

در این مقاله، ما از معادلات همگن و ناهمگن لیپمن–شوئینگر برای محاسبه انرژی بستگی و طول پراکندگی کائون–پروتون استفاده کرده‌ایم. انتگرال‌ها به روش عددی و با استفاده از روش گسسته سازی گاوس–لژاندر[٤] با تعداد نقاط شبکه گاوسی ۸۰ به‌دست آمده‌اند. برنامه نویسی با استفاده از زبان برنامه‌نویسی پایتون[٥] انجام شده و از کتابخانه numpy برای انجام محاسبات استفاده نموده‌ایم.

اکنون به حل معادله ناهمگن لیپمن–شوئینگر می‌پردازیم. پتانسیل را به صورت جداپذیر در نظر می‌گیریم:

$$V = |g > \lambda < g| \tag{2}$$

که در آن λ، شدت برهمکنش است. با استفاده از پتانسیل‌های جداپذیر می‌توان معادلات لیپمن–شوئینگر[۱۵]

$$t = V + VG_0t \tag{3}$$

را به صورت تحلیلی حل نمود. که در آن، t ماتریس گذار دوجسمی، $G_0 = (E - H_0)^{-1}$ انتشارگر آزاد، E انرژی کل و H_0 مربوط به انرژی جنبشی سیستم است. با استفاده از پتانسیل جداپذیر، ماتریس گذار به شکل زیر خواهد بود[۱٦]:

$$t = |g > \tau < g| \tag{4}$$

اکنون به محاسبه τ می‌پردازیم.

$$\begin{aligned}
&t = V + VG_0t \rightarrow |g > \tau < g| = |g > \lambda < g| + |g > \lambda < g|G_0|g > \tau < g| \\
&\rightarrow < \overrightarrow{p'}|g > \tau < g|\vec{p} > = < \overrightarrow{p'}|g > \lambda < g| + < \overrightarrow{p'}|g > \lambda \int d\overrightarrow{p''} < g|\overrightarrow{p''} > G_0 \times \\
&\qquad\qquad < \overrightarrow{p''}|g > \tau < g|\vec{p} > \\
&, \widetilde{G_0} = \int_0^\infty d\overrightarrow{p''}\, g(\overrightarrow{p''}) g(\overrightarrow{p''})^* \frac{1}{E - p''^2/2\mu} \\
&\rightarrow \tau = \lambda + \lambda\widetilde{G_0}\tau \rightarrow \tau\big(1 - \lambda\widetilde{G_0}\big) = \lambda \rightarrow \tau = \lambda\big(1 - \lambda\widetilde{G_0}\big)^{-1}
\end{aligned} \tag{5}$$

---

[٤] Gauss-Legendre

[٥] Python

p تکانه، $g(\overrightarrow{p''}) = \frac{1}{p''^2+\beta^2}$، تابع ساختار در فضای تکانه و β بُرد (برهم‌کنش) است.

رابطه طول پراکندگی با ماتریس گذار به صورت زیر است[۱]:

$$a = lim_{p,E\to 0}\{-(2\pi)^2 \frac{\mu}{\hbar^2} < \vec{p}|t|\vec{p} >= -(2\pi)^2 \frac{\mu}{\hbar^2} < \vec{p}|g > \tau < g|\vec{p} >\} \quad (6)$$

که در آن، $\hbar$ طول کاهیده پلانک است.

حال به حل معادله همگن لیپمن-شوئینگر می‌پردازیم. البته قبل از حل این معادله، نحوه حاصل شدن آن را از معادله شرودینگر بررسی می‌کنیم.

$$H|\psi >= E|\psi > \quad (7)$$

که در آن ψ تابع موج، و H هامیلتونی کل است.

$$(H_0 + V)|\psi >= E|\psi > \rightarrow V|\psi >= (E - H_0)|\psi > \rightarrow \ G_0V|\psi >= |\psi > \quad (8)$$

اکنون، هدف ما حل این معادله‌ی ویژه مقداری است:

$$G_0V|\psi >= \alpha|\psi > \quad (9)$$

α ویژه مقدار این معادله بوده و هنگامی که α=۱ حاصل شد، انرژی مربوطه، انرژی بستگی مطلوب است. سپس معادله را به ازای پتانسیل جداپذیر حل می‌کنیم:

$$G_0|g > \lambda < g|\psi >= \alpha|\psi > \rightarrow< \vec{p}|G_0|g > \lambda \int d\overrightarrow{p'} < g|\overrightarrow{p'} >< \overrightarrow{p'}|\psi >= \alpha < \vec{p}|\psi > \quad (10)$$

این انتگرال نیز به روش گسسته سازی گاوس-لژاندر حل می‌شود.

در مرجع [۱] پارامترهای پتانسیل جداپذیر در برهم‌کنش K^-p به صورت زیر به‌دست آمده‌اند:

$$\beta_{I=0} = \beta_{I=1} = 3.5\ fm^{-1}(\text{معادل با } 3.5 \times (10^{-15}m)^{-1})$$
$$\lambda_{I=0} = (-1.944 - i0.253)fm^{-2}(\times (10^{-15}m)^{-2}) \quad (11)$$
$$\lambda_{I=1} = (-0.660 - i0.596)fm^{-2}(\times (10^{-15}m)^{-2})$$

ما از این پارامترهای پتانسیل استفاده کرده و طول پراکندگی و انرژی بستگی K^-p را محاسبه می‌کنیم.

نتایج:

در این قسمت، به مقادیر به‌دست آمده از حل معادلات همگن و ناهمگن لیپمن-شوئینگر می‌پردازیم.

با استفاده از پارامترهای پتانسیل مربوط به هرکدام از ایزواسپین‌ها، طول پراکندگی مربوط به آن ایزواسپین را محاسبه می‌کنیم:

$$a(I = 0) = -(2\pi)^2 \frac{\mu}{\hbar^2} g(\vec{p})^2 \ \lambda_{I=0}\left(1 - \lambda_{I=0}\widetilde{G_0}\right)^{-1} \quad (12)$$

$$a(I=1) = -(2\pi)^2 \frac{\mu}{\hbar^2} g(\vec{p})^2 \, \lambda_{I=1}\big(1-\lambda_{I=1}\widetilde{G_0}\big)^{-1}$$

با محاسبه $\widetilde{G_0}$ به صورت عددی و با استفاده از روش گسسته سازی گاوس–لژاندر، مقادیر زیر برای $a(I=0)$ و $a(I=1)$ به‌دست می‌آیند:

$$a(I=0) = (-1.613 + i0.424)fm\ (\times 10^{-15}m)$$
$$a(I=1) = (0.059 + i0.567)fm\ (\times 10^{-15}m) \qquad (13)$$

بنابراین طول پراکندگی K^-p برابر با مقدار زیر خواهد بود:

$$a(K^-p) = \frac{a(I=0)+a(I=1)}{2} = (-0.778 + i0.496)fm\ (\times 10^{-15}m) \qquad (14)$$

که بسیار نزدیک به مقدار طول پراکندگی K^-p در آزمایش KEK می‌باشد.

$$a_{K^-p}^{KEK} = (-0.78 \pm 0.15 \pm 0.03) + i(0.49 \pm 0.25 \pm 0.12)fm\ (\times 10^{-15}m) \qquad (15)$$

حل ویژه مقداری معادله همگن لیپمن–شوئینگر به ازای پارامترهای پتانسیل ذکر شده در رابطه (۱۱)، نیز به ازای انرژی بستگی (×۱/۶×۱۰^{-۱۳}j) ۲۹–i۲۵MeV–، مقدار ۱/۰۰۲ را به‌دست می‌دهد، که مقداری قابل قبول است. همچنین با استفاده انرژی بستگی می‌توان مقدار جرم و پهنای ذره $\Lambda(1405)$ را تعیین نمود.

$$m_\Lambda = m_K + m_p - BE = 495 + 939 - 29 = 1405MeV\ (\times 1.6 \times 10^{-13}j)$$
$$\Gamma_\Lambda = 2 \times (-25) = -50\ MeV\ (\times 1.6 \times 10^{-13}j) \qquad (16)$$

در اینجا از جرم‌های میانگین‌گیری شده به جای جرم‌های کائون و پروتون استفاده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، جرم و پهنای ذره $\Lambda(1405)$ به خوبی بازتولید شده‌اند.

همچنین لازم به ذکر است، نظریه‌پردازان کایرال مقادیر متفاوتی را برای طول پراکندگی K^-p ذکر کرده‌اند. به طور مثال در مرجع [۱۷]، مقادیر زیر به ازای ایزواسپین صفر و یک طول پراکندگی $\bar{K}N$ گزارش شده‌اند:

$$a_{\bar{K}N}(I=0) = -1.70 + i0.68\ fm\ (\times 10^{-15}m)$$
$$a_{\bar{K}N}(I=1) = 0.37 + i0.60\ fm\ (\times 10^{-15}m) \qquad (17)$$

برای به‌دست آوردن این مقادیر به ازای پتانسیل‌های جداپذیر پدیده‌شناختی، با فرض اینکه $\beta = 3.5\ fm^{-1}$ (معادل با$(3.5 \times (10^{-15}m)^{-1}$) باشد، لازم است:

$$\lambda_{I=0} = (-1.8162 - i0.3345)fm^{-2}(\times (10^{-15}m)^{-2})$$
$$\lambda_{I=1} = (-0.7932 - i0.2881)fm^{-2}(\times (10^{-15}m)^{-2}) \qquad (18)$$

باشد، تا طول‌های پراکندگی گزارش شده توسط این مرجع بازتولید شوند. همچنین همان‌طور که واضح است میانگین طول‌های پراکندگی $a_{\bar{K}N}(I=0)$ و $a_{\bar{K}N}(I=1)$، $a_{K^-p}^{KEK}$ را به‌دست نمی‌دهد. از پارامترهای پتانسیل موجود در رابطه (۱۸) برای به‌دست آوردن انرژی بستگی نیز استفاده می‌کنیم که مقدار α=۰/۹ را به ازای انرژی بستگی (×۱/۶×۱۰^{-۱۳}j)

۲۹–i۲۵MeV–، و به ازای انرژی بستگی (j۱۳-^۱۰×۱/۶ ×) ۱۶–i۲۵MeV– مقدار α=۱/۰۰۳ را به‌دست می‌دهد. بنابراین جرم و پهنای ذره Λ(1405) را برابر با (j۱۳-^۱۰×۱/۶ ×) ۱۴۱۸–i۲۵MeV تخمین می‌زند.

بحث و نتیجه‌گیری:

در کار حاضر، طول پراکندگی و انرژی بستگی K^-p و همچنین جرم و پهنای ذره Λ(1405) با استفاده از پتانسیل‌های جداپذیر محاسبه گردید. ابتدا معادلات به‌دست آمده را به ازای پتانسیل مورد نظر امتحان نمودیم تا میزان کارایی آن‌ها را بررسی کنیم که مشاهده شد به خوبی مقادیر مورد نظر باز تولید می‌شوند. همچنین سعی نمودیم یکی از طول‌های پراکندگی گزارش شده توسط نظریه‌پردازان کایرال را با استفاده از پتانسیل جداپذیر پدیده‌شناختی بررسی کنیم، و همان‌طور که مشاهده می‌کنیم جرم و پهنای ذره Λ(1405) را به‌ترتیب در محدوده (j۱۳-^۱۰×۱/۶ ×)۱۴۱۵~۱۴۲۵MeV و (j۱۳-^۱۰×۱/۶ ×)۵۰~۷۰MeV گزارش می‌کند، که مقداری مورد قبول است.

مراجع:

[1] J. Donoval (2008), Few-Body Systems with Non-Zero Strangeness, Diploma Thesis, Charles University in Prague.
[2] A. Deloff, Phys. Rev. C61 (2000) 024004.
[۳] م. حسنوند(۱۳۹۱)، بررسی تشکیل ساختار بسیار مقید (K^-K^-pp و Λ(۱۴۰۵)) در برخورد پروتون‌های پر انرژی، رساله دکتری، دانشگاه صنعتی اصفهان.
[4] R. H. Daltiz, A. Deloff, J. Phys. G17 (1991) 289.
[5] M. Iwasaki et al., Phys. Rev. Lett. 78 (1997) 3067.
[6] T. M. Ito et al., Phys. Rev. C58 (1998) 2366.
[7] G. Beer et al., Phys. Rev. Lett. 94 (2005) 212302.
[8] S. Deser, M. L. Goldhaber, K.Bauman, Phys. Rev. 96 (1954) 774.
[9] T. L. Trueman, Nucl. Phys. 26 (1961) 67.
[10] M. Bazzi, et al., Phys. Lett. B 704 (2011) 113–117.
[11] M. Bazzi, et al., Nucl. Phys. A 881 (2012) 88–97.
[12] T. Kishimoto, Phys. Rev. Lett. 83 (1999) 4701.
[13] Y. Akaishi, T. Yamazaki, Phys. Rev. C65 (2002) 044005.
[14] A. Dote, H. Horiuchi, Y. Akaishi, T. Yamazaki, Phys. Lett. B590 (2004) 51.
[15] B. A. Lippmann and J. Schwinger, Phys. Rev. 79, 469 (1950).
[۱۶] س. مری(۱۳۹۵)، بررسی هسته های چند ذره ای تک کائونی و دو کائونی به روش فدیف، رساله دکتری، دانشگاه صنعتی اصفهان.
[17] A. D. Martin, Nucl. Phys. B179, 33 (1981).