بکارگیری روش وردشی ربی برای بدست‌آوردن حل‌های اسکیرمیون جهت مطالعه برهم کنش بین این نوع ساختارهای سالیتونی

هادی لوکزاده، منصوره تاتاری*، مائده عطایی
دانشکده فیزیک دانشگاه یزد، صفاییه ، یزد

چکیده

اسکیرمیون ها جواب های معادلات غیرخطی هستند که می توانند توصیف کننده رفتار ماده هسته ای درون هسته باشند. به عبارت دیگر می توان از اسکیرمیون ها برای توصیف رفتار یک سیال مزونی و یا باریونی استفاده کرد. در این مقاله ابتدا به معرفی اجمالی این نوع از امواج یعنی امواج سالیتوری و سالیتون ها خواهیم پرداخت. اسکیرمیون ها نوعی از سالیتون ها هستند. پس از معرفی اجمالی این نوع معادلات خواهیم دید که معادله ی اسکیرمیون به صورت معادله دیفرانسیل غیر خطی مرتبه دو می شود. علت پایداری جواب را از دیدگاه پایستگی بار توپولوژیکی بررسی نموده ایم. برای حل معادلات روش پرتاب متغیر قبلا به کار برده شده است. برای حل این معادلات روش وردشی ربی و جاکوبز را معرفی نموده ایم. تا کنون با استفاده از این نوع روش حل های ورتکس ها که نوعی دیگر از سالیتون ها هستند مورد مطالعه قرار گرفته است. به دنبال یافتن حل های عددی با استفاده از این روش هستیم.

کلیدواژه‌ها : مدل هسته ای، سالیتون های توپولوژیکی، اسکیرم، اسکیرمیون، حل وردشی ربی

Appling the Variational Method to obtain Skyrmion solution for Studying Interaction between this Type of Solitonic Structures

H. Lookzadeh, M. Tatari*, M. Ataei

Department of Physics,Yazd university, Safaeih, Yazd,

Abstract

Skyrmions are the solutions of nonlinear equations that can describe the behavior of nuclear material within the nucleus. In other words, Skyrmions can be used to describe the behavior of a meson or baryonic fluid. In this article, we will first briefly introduce this type of waves, namely solitary waves and solitons. Skyrmions are a type of soliton. After a brief introduction of this type of equations, we will see that the Skyrmions equation is second order nonlinear differential equation. We have investigated the reason for the stability of the answer from the perspective of topological charge conservation. The shooting parameter method has already been used to solve the equations. To solve these equations, we have introduced the variational method of Rebbi and Jacobs. So far, vortex solutions, which are another type of solitons, have been studied using this method. We are looking for numerical solutions using this method.

Key words: Nuclear model, Topological Soliton, Skyrme, Skyrmion, Rebbi variational solution

Email: mtatari@yazd.ac.ir

۱.مقدمه

امواج سالیتوری[۱] نوعی از امواج هستند که با وجود دارا بودن ویژگی رفتار غیرخطی و پاشندگی در حین عبور از محیط، از خود رفتارهای خطی‌گونه نشان می دهند[1]. بدین معنا که با وجود دارا بودن رفتار غیرخطی و پاشندگی، شکل تابع موج با عبور از محیط تغییر نمی‌نماید. رفتار امواج سالیتوری در هنگام برخورد با یکدیگر پیچیده اما پس از برخورد به شکل اولیه خود برمی‌گردند. به امواج سالیتوری پایدار در زمان سالیتون[۲] می‌گویند. سالیتون‌ها در دو نوع توپولوژیکی و غیرتوپولوژیکی دسته‌بندی می شوند. در سالیتون‌های توپولوژیکی حل‌ها دارای یک نوع ناوردایی و ثابت حرکت هستند که ریشه آن متفاوت از کمیت‌های پایسته رایج موجود همانند پایستگی انرژی ، تکانه و تکانه زاویه‌ای است. ریشه اصلی پایستگی کمیت های ذکر شده از قضیه نوتر است [2] در حالیکه بارتوپولوژیکی پایسته منشا هندسی دارد و به هندسه و شرایط مرزی حل‌ها مربوط است. سالیتون‌های توپولوژیک حاوی چنین نوع پایستگی‌هایی هستند. همچنین انرژی سالیتون ها محدود است. مطالعه و مشاهده چنین نوع سالیتون‌هایی در سیستم های فیزیکی از اهمیت خاصی برخوردار است. در سالیتون‌های غیرتوپولوژیکی امکان مشاهده چنین باری وجود ندارد.

انواع مختلفی سالیتون وجود دارد. معمولا سالیتون‌ها را باتوجه به شکل های جواب‌های آنها دسته بندی می‌نمایند. به عنوان مثال تک قطبی‌ها[۳] ساختارهای سالیتونی نقطه شکل در سه بعد هستند. همچنین ورتکس‌ها[۴] ساختارهای خط شکل در سه بعد هستند. اینستنتون ها[5] حل های سالیتونی در چهار بعد هستند. تاکنون در بسیاری از محیط‌های مادی رفتارهای سالیتونی مشاهده شده‌اند[3]. اولین بار امواج سالیتوری توسط یک مهندس عمران به نام اسکات راسل[۶] هنگام اسب سواری کنار یک کانال آب مشاهده شد. او مشاهده نمود که موج ایجاد شده جلوی قایق درون کانال مسافت زیادی درون کانال را بدون کاهش دامنه می پیماید. امروزه در بسیاری از سیستم های فیزیکی رفتارهای سالیتوری را مشاهده نموده ایم یا به دنبال آن هستیم. به عنوان مثال شکل نفوذ میدان مغناطیسی درون ابررساناهای نوع دو به شکل ورتکس گونه است[4]. انتشار امواج سالیتوری در فیبر نوری برای غلبه بر تضعیف، مشاهده امواج سالیتوری در محیط های سیالات از جمله تعدادی از این موارد رفتار سالیتوری است. همچنین این ایده وجود دارد که ساختارهای سالیتونی در توصیف فیزیک هسته ای نقش داشته باشند. به عنوان مثال می توان وجود ساختارهای سالیتونی در خلا نیروی هسته ای قوی یا همان دینامیک رنگی کوانتومی[۷] (QCD) را نام برد. مدل ابررسانای دوگان[۸] و نیز مدل ورتکس مرکزی[۹] توفت[۱۰] از مهمترین کاندیدهای این گونه توصیف ها هستند[5]. همچنین امکان وجود اینگونه ساختارها در توصیف رفتارهای مشاهداتی ماده هسته ای درون ستاره های نوترونی می تواند نقش بسزایی ایفا نماید[6]. به عنوان مثال می توان نقصان مشاهده شده در تناوب ستاره های نوترونی را به وجود و برهم کنش اینگونه سالیتون‌ها نسبت داد[7].

یکی از مدل‌های جذاب سالیتونی مدلی است که توسط فیزیکدان هسته‌ای انگلیسی تبار اسکیرم[۱۱] جهت توصیف رفتار ماده هسته‌ای و ماده باریونی ارایه گردید[8]. ارایه این مدل قبل از یافتن نیروی هسته‌ای به شکل تقارن رنگی یا همان دینامیک رنگی کوانتومی بود. پس از ارایه نظریه دینامیک رنگی توسط گلمان[۱۲] اندکی از علاقه‌مندی مدل اسکیرم کاسته شد. اما با کار دوباره توفت روی حد بی‌نهایت [9,1] این درجه آزادی رنگی، به نوعی اثبات شد که چنین محیط‌هایی باید

[1] Solitary
[2] Soliton
[3] Monopole
[4] Vortex
[5] Instanton
[6] Scott Russell
[7] Quantum Chromo Dynamics
[8] Dual Superconductivity
[9] Center Vortex Model
[10] t'Hooft
[11] Skyrme
[12] Gell-mann

دارای حل های سالیتونی به شکل اسکیرم گونه باشند. در واقع امکان توصیف غیرخطی یا سالیتونی برای حد انرژی کم نظریه دینامیک رنگی کوانتومی با اینکار میسر گردید. در این مقاله قصد داریم تا به توصیف مدل اسکیرم که توصیف کننده نوعی سیال مزونی است بپردازیم. سپس روشی عددی جهت یافتن حل معادله اسکیرم ارایه می دهیم. این روش که اولین بار توسط ربی[۱۳] و جاکوبز[۱۴] معرفی شد یک روش وردشی و عددی است[10,11]. مزیت این روش نسبت به سایر روش‌های عددی موجود نظیر روش‌هایی مثل روش اجزای محدود[۱۵] یافتن حل‌ها به شکل توابع تحلیلی با ضرایب بدست آمده از محاسبات عددی است. بدین ترتیب امکان استفاده از این نوع حل‌ها در مدل‌های هسته‌ای و وارد نمودن این نوع رفتار در محاسبات هسته‌ای نظیر کدهای رایج موجود امکان‌پذیر می شود[12]. علاوه بر آن امکان مطالعه برهم‌کنش بین اسکیرمیون نیز با استفاده از چنین روشی مسیر می شود.

۲. اسکیرمیون

اسکیرمیون یک مدل غیر خطی از پایون ها در سه بعد است. میدان $U(x,t)$ حاوی یک میدان اسکیرم با تقارن گروهی SU(2) با درایه های اسکالری است. مدل اسکیرم یک مدل تقریبی [1] در حد انرژی های کم نظریه QCD است و با افزایش تعداد درجات رنگی N سیستم به بی نهایت می تواند تبدیل به حل دقیق سیستم شود. مدل اسکیرم می تواند به حل های سالیتونی توپولوژیک برای توصیف باریون ها منجر شود. به این حل های سالیتونی اسکیرمیون می گویند. لاگرانژی این نظریه را می توان به شکل زیر در نظر گرفت:

$$(1)\ L=\int\{-\tfrac{1}{2}Tr(R_\mu R^\mu)+\tfrac{1}{16}Tr([R_\mu,R_\upsilon][R^\mu,R^\upsilon])\}d^3x\ ,$$

که در آن $R_\mu=(\partial_\mu U)U^\dagger$ و Tr به معنای رد است. معادله اویلر لاگرانژ برای چنین لاگرانژی ای به شکل زیر می شود:

$$\partial_\mu\left(R^\mu+\frac{1}{4}[R^\mu,[R_\nu,R^\mu]]\right)=0. \qquad (2)$$

رابطه مستقیم میدان پایونی را می توان با رابطه زیر در نظر گرفت:

$$U=\boldsymbol{\sigma}+i\boldsymbol{\pi}.\boldsymbol{\tau}\ , \qquad (\mathbf{3})$$

که $\boldsymbol{\tau}$ ماتریس های پائولی هستند. $\boldsymbol{\pi}$ نقش میدان پایونی $\boldsymbol{\pi}=(\boldsymbol{\pi_1},\boldsymbol{\pi_2},\boldsymbol{\pi_3})$ را دارد و $\boldsymbol{\sigma}$ نقش میدان اضافی را دارد که در شرط زیر صدق می نمایند:

$$\boldsymbol{\sigma}^2+\boldsymbol{\pi}.\boldsymbol{\pi}=1\ . \qquad (4)$$

اگر $U(x)$ تنها به پارامترهای فضایی وابسته شود جواب هایی ایستا خواهیم داشت و لاگرانژی به شکل زیر می شود

$$E=\frac{1}{12\pi^2}\int\{-\frac{1}{2}Tr(R_iR_i)-\frac{1}{16}Tr([R_i,R_j][R_i,R_j])\}d^3x \qquad (5)$$

ضریب قبل از انتگرال را برای سادگی محاسبات بعدی اضافه نموده ایم. معادلات حرکت را می توان با استفاده از معادلات اویلر لاگرانژ بدست آورد.

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial U}-\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial_\mu(\partial U)}=0. \qquad (6)$$

با جایگذاری U به شکل

$$\boldsymbol{\pi}=cos f(r)\,\widehat{\boldsymbol{n}},\qquad \boldsymbol{\sigma}=sin\,f(r)\,,\qquad U(x)=exp(if(r)\widehat{\boldsymbol{n}}.\boldsymbol{\tau}) \qquad (7)$$

و بسط جملات توان نمایی معادله بدست آمده برابر می شود با:

$$(r^2+2sin^2f)f''+2rf'+sin\,2f\left(f'^2-1-\frac{sin^2f}{r^2}\right)=0. \qquad (8)$$

---

13 Rebbi
14 Jacobs
15 Finite Element Method

بدلیل غیر خطی بودن این معادله یافتن حل آن به روش تحلیلی امکان پذیر نیست. از روش های عددی جهت حل این معادله می توان استفاده نمود. یکی از روش ها روش عددی پرتاب پارامتر[16] است. علاوه بر آن می توان از روش وردشی برای یافتن جواب ها به صورت عددی استفاده نمود. در قسمت بعد روشی جهت بدست آوردن این حل ها بر پایه روش وردشی ارایه می گردد.

اما قبل از یافتن حل های غیر بدیهی می توان از نگاه توپولوژی وجود جواب های غیر بدیهی را مورد بررسی قرار داد. توابع مربوطه، یک نگاشت از فضای سه بعدی اقلیدسی بعلاوه شرط بی نهایت برابر با مقدار محدود، به فضای خمینه گروه SU(2) هستند. فضای فیزیکی برابر است با اجتماع $R^3 \cup \{\infty\}$ که برابر با S^3 یعنی یک کره غوطه ور در فضای چهاربعدی می شود. فضای خمینه[17] گروه نیز S^3 است. پس نگاشت مورد نظر $S^3 \to S^3$ است. این به معنای گروه بنیادی [13] مرتبه سوم این فضاست. داریم

$$\pi_3(S^3) = Z \tag{9}$$

غیر بدیهی بودن گروه بنیادی مرتبه سوم این فضا تایید کننده وجود جواب ها و حل های غیر بدیهی برای چنین لاگرانژی ای روی چنین فضایی است. پس قبل از حل عددی معادله با استفاده از دانش توپولوژی و گروه بنیادی مطمئن می شویم که این معادله باید دارای جواب های غیر بدیهی باشد. ناوردای توپولوژیکی حاصل در اینجا را می توان با محاسبه فرمول زیر بدست آورد:

$$B = -\frac{1}{24\pi^2}\int \varepsilon_{ijk} Tr(R_i R_j R_k)\, d^3x, \tag{9}$$

که در آن $R_i = (\partial_i U)U^\dagger$ و برای حل های بالا داریم

$$B = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f'\, sin^2 f\, dr \;= \frac{1}{\pi}\, f(0) = 1. \tag{10}$$

عدد B همان ناوردای توپولوژیکی یا ناوردای باریونی مورد نظر است. برای شرایط مرزی جهت محدود شدن و خوش رفتار شدن جواب ها شرط های $f(\infty) = 0$ و $f(0) = \pi$ را در نظر می گیریم. این عدد برای چنین حلی همواره ثابت است.

۳. روش وردشی ربی برای یافتن حل های سالیتونی

روشی که تا کنون برای یافتن چنین حل هایی وجود داشته استفاده از روش حل عددی معادلات به روش پرتابی [1] است. بدین شکل که با توجه به حد بی نهایت فاصله، خطی سازی برای معادله صورت می گیرد. با خطی سازی معادله (۸)، با این فرض که در بی نهایت تغییرات تابع ناچیز می شود، به شکل زیر در می آید:

$$(1+\frac{2f^2}{r^2})f'' + \frac{2rf'}{r^2} + 2f\,(\frac{f'^2}{r^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{f^2}{r^4}) = 0 \;\Rightarrow 0 + 0 + 2f\,(0 - \frac{1}{r^2} - \frac{f^2}{r^4}) = 0 \tag{11}$$

جواب های چنین معادله ای در فواصل دور به صورت:

$$f(r) \sim \frac{C}{r^2}\,, \tag{12}$$

است. ضریب نامعلوم به روش پرتاب متغیر به روش عددی محاسبه می گردد. از روش های دیگر، حل با استفاده از روش اجزای محدود را می توان نام برد[14].

اما یکی از روش های رایج برای یافتن حل های ساختارهای سالیتونی ورتکس گونه، روش وردشی ارائه شده توسط ربی و جاکوبز است[10,11]. می خواهیم حل های این معادله را به روش وردشی بیابیم. در این روش ابتدا حد مجانبی فواصل دور جواب معادلات را می یابیم. سپس برای یافتن جواب در تمام ناحیه فرض می کنیم جواب به صورت حاصلضرب یک

[16] Shooting parameter
[17] Manifold

چند جمله ای در جواب مجانبی است. ضرایب چند جمله ای را با روش وردشی و کمینه کردن انرژی اسکیرمیون می یابیم. این روش اولین بار توسط ربی و جاکوبز در ۱۹۸۰ معرفی شد[10]. با استفاده از این روش امکان بدست آوری جواب های عددی برای یک نوع دیگر از ساختارهای سالیتونی یعنی ورتکس ها میسر شد. ورتکس ها نیز حل های سالیتونی با بار توپولوژیکی هستند که اولین بار ایده وجود چنین حل هایی در ابررسانایی توسط آبریکاسو[18] ارایه شد [4]. بر اساس پیش بینی آبریکاسو شکل نفوذ میدان مغناطیسی درون ابررساناها به شکل یک ساختار سالیتونی پایدار است. بدین ترتیب با جایگذاری جواب های به شکل (۱۲) در انرژی سیستم و استفاده از روش نیوتن می توان مقادیر بهینه ضرایب را یافت. در روش نیوتن ضرایب هر بار در تکرار به صورت زیر است :

$$V_i^{(m+1)} = V_i^{(m)} + \sum_j [\boldsymbol{H}^{-1}]_{ij} \boldsymbol{D}_j^{(m)}, \qquad (13)$$

که $\boldsymbol{V_i}$ نماینده ضرایب مجهول و i نماینده تعداد ضرایب است. $\boldsymbol{H}$ ماتریس هسین[19] یا مشتقات مرتبه دوم از ضرایب است و داریم :

$$\boldsymbol{D}_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V_i}\bigg|_{V_i = V_i^{(m)}}, \qquad (14)$$

بدین روش با تعداد تکرار مناسب، ضرایبی که کمینه کننده انرژی اسکیرمیون هستند را می یابیم. علاوه بر آن با یافتن شکل حد بی نهایت می توانیم فرض کنیم رفتار جواب در دیگر نقاط نیز به جای مقدار ثابت ضریب جمله عکس مجذوری، به شکل یک چند جمله ای است. به عنوان مثال می توان فرض نمود جواب ها در تمام نقاط به شکل

$$f(r) = \sum_{i=-2}^{-n} C_i r^i, \qquad (15)$$

است. می توان به عنوان مثال تا شش جمله یعنی شش ضریب نامعین را انتخاب نمود و با استفاده از روش نیوتن انرژی سیستم را کمینه کرد. در شرایط کمینه شدن انرژی، ضرایب در صورت همگرایی دیگر تغییر نمی کنند و این را می توان در برنامه با توجه به عدم اختلاف بین ضرایب بدست آمده بین مرحله بعدی و قبلی متوجه شد. بدین ترتیب می توانیم با این روش، حل هایی برای تمام فواصل اسکیرمیون ها بیابیم. فایده اینکار این است که در صورت داشتن حل در تمام نقاط می توانیم برهم کنش بین اسکیرمیون ها را در هر فاصله ای بیابیم.

۴. آنساتز آبریکاسو[20] جهت مطالعه برهم کنش ها

یکی از سوالات جذاب و حل نشده اسکیرمیون ها بررسی برهم کنش بین ساختارهای اسکیرم گونه است. در مدل آبریکاسو آنساتز این فرض صورت می گیرد که رفتار تابع حالت دو اسکیرمیون را به شکل حاصلضرب دو تابع تک اسکیرمیون می توان نوشت[1,11]. یعنی

$$U_{12}(x) = U\ \ (x - x_1).U\ \ (x - x_2)$$

بدین ترتیب می توان فرض نمود که جواب ها در حضور دو اسکیرمیون باید در چنین معادله ای صدق نمایند. شرط مرزی نیز می تواند $f(0) = k\pi$ باشد. بدین ترتیب عدد باریونی یا بار توپولوژیکی هر یک از جواب ها می تواند به کلاس های مختلفی مربوط شود. به عنوان مثال کلاس k=1 برای اسکیرمیون با بار پایسته یک است و کلاس k=2 برای اسکیرمیون با بار پایسته دو و غیره . می توان باز به روش وردشی ضرایب نامعین برای کمینه کردن چنین حل هایی را یافت و بدین ترتیب سه حالت ممکن است بوجود آید :

[18] Abrikosov
[19] Hessian
[20] Abrikosov Ansatz

۱-اگر انرژی اسکیرمون ها با افزایش فاصله کاهش یابد به معنای تمایل اسکیرمیون ها به قرار گرفتن در حالت با انرژی کمتر هستند. پس اسکیرمیون ها تمایل خواهند داشت از هم دور شوند. پس برهم کنش بین آنها دافعه خواهد بود.
۲-اگر انرژی اسکیرمیون ها با افزایش فاصله زیاد شود این به معنای تمایل اسکیرمیون ها به در کنار هم بودن و ادغام آنها است. پس برهم کنش جاذبه است.
۳-اگر با تغییر فاصله انرژی تغییر ننماید به معنای عدم وجود برهم کنش بین اسکیرمیون های مورد نظر خواهد بود.
با استفاده از روش وردشی ربی امکان مطالعه برهم کنش بین ورتکس ها برقرار شده است. تا کنون برای برهم کنش بین اسکیرمیون ها تنها حد فاصله دور در نظر گرفته شده است. در این حد اسکیرمیون ها به شکل سه عدد دو قطبی در جهت هر یک از محورها در نظر گرفته می شود. بدین ترتیب در روش دوقطبی، برهم کنش بین دو قطبی ها در فواصل دور مورد مطالعه قرار می گیرد. با اعمال این روش برای بدست آوردن برهم کنش امکان مطالعه برهم کنش بین اسکیرمیون ها فراهم می شود.

۵.نتیجه

در این مقاله ضمن معرفی یکی از حل های خاص سالیتونی به نام اسکیرمیون به معرفی ویژگی و شکل معادلات این نوع ساختارها پرداختیم. در مورد علت پایداری جواب های این نوع معادلات از دیدگاه توپولوژیکی و گروه های بنیادی صحبت کردیم. پس از آن روشی جهت یافتن حل های این نوع معادلات بیان کردیم. روش رایج حل فواصل دور معادله، روش پرتابی است. روش وردشی ربی و جاکوبز را معرفی نمودیم. در حال یافتن حل های این نوع معادلات با استفاده از این روش هستیم. جواب حد فاصله دور با استفاده از این روش انتظار می رود با جواب های روش پرتابی یکی شود. همچنین مزیت استفاده از این روش امکان یافتن حل معادله در تمام فواصل است. با داشتن حل در تمام فواصل می توان برهم کنش بین اسکیرمیون ها را مورد مطالعه قرار داد که از مسایل جذاب فیزیک سالیتون ها محسوب می شود. مزیت دیگر این روش نسب به حل های کاملا عددی مثل روش اجزای محدود، یافتن توابع و شکل حل است. با داشتن این نوع حل ها می توان تاثیر وجود رفتار اسکیرمیون ها را در مدل های پتانسیل هسته ای وارد نموده و اثرات رفتار اسکیرمیونی را مورد مطالعه قرار داد[12].

مراجع

[1] N. Manton, S. Sutcliffe, Topological Solitons, Cambridge University Press, New York, (2004); H. Weigel, Chiral Soliton Models for Baryons, Lect. Notes Phys. 743, Springer, Germany, (2008); V. G. Makhankov Y. P. Rybakov,V. I. Sanyuk, The Skyrme Model Fundamentals Methods Applications, Springer-Verlag Berlin (1993); R. Rajarman, Solitons and Instantons, Elsevier, North Holand, (1989).

[2] L. H.Ryder, Quantum Field Theory, Cambridge University Press, England (1996).

[3] Andreas W. Liehr, Dissipative Solitons in Reaction Diffusion Systems Mechanisms, Dynamics, Interaction, Springer, Germany (2013);

[4] A. Abrikosov, On the Magnetic Properties of Superconductors of the Second Group,*JETP* **5**, (1957) 1174

[5] G.'t Hooft, The Topological Mechanism for Permanent Quark Confinement in a Non-abelian Gauge Theory, *Physica Scripta*.**25** (1982) 133; G. 't Hooft," On the Phase Transition towards Permanent Quark Confinement", Nucl. Phys. **B** 138 (1978) 1; G. 't Hooft," A property of Electric and Magnetic Flux in Non-Abelian Gauge Theories", Nucl. Phys. **B** 153 (1979) 141.

[6] M. G. Alford, K. Rajagopal and F. Wilczek, Nucl. Phys. B 537, 443 (1999); M. M. Forbes and A. R. Zhitnitsky, Phys. Rev. D 65, 085009 (2002) [arXiv:hep-ph/0109173].

[7] G. Marmorini, S. Yasui, M. Nitta, Pulsar glitches from quantum vortex networks, arXiv:2010.09032.

[8] T. H. R. Skyrme, A Nonlinear Field Theory *Proc. Roy. Soc. Lond. A***260** (1961) 127; A Unified Field Theory of Mesons and Baryons *Nucl. Phys.***31** (1962) 556;

[9] G. 't Hooft, repr. in The Large N Expansion in Quantum Field Theory and Statistical Physics, Nucl. Phys. B72 (1974) 461..

[10] L. Jacobs, C. Rebbi, Interaction Energy of Superconducting Vortices, *Phys. Rev. B* **19**, (1979) 4486; S. Z. Lin, X. Hu, Vortex States and the Phase Diagram of a Multiple-Component Ginzburg-Landau Theory with Competing Repulsive and Attractive Vortex Interactions,*Phys. Rev. B* **84**, (2011) 214505.

[11] H. Lookzadeh, S. Deldar, Interaction between Multi Components Vortices at Arbitrary Distances Using a Variational Method in the Ginzburg-Landau Theory, *Eur.Phys. J. C* **74** (2014) 3093.

[12] Koning AJ, Rochman D (2012) Modern nuclear data evaluation with the TALYS code system. Nucl Data Sheets. 113:2841–2934 http://www.talys .eu/downl oad-talys.

[13] M. Nakahara, Geometry, Topology and Physics, Taylor and Francis, Great Britain (2003).

[14] https://freefem.org/; L. Faddeev, A. J. Niemi, Knots and Particles *Nature*,**387** (1997) 58; J. Garaud, J. Carlstrom, E. Babaev, M. Speight, Chiral *CP* 2 Skyrmions in Three Band Superconductors, *Phys. Rev. B***87**, (2013) 014507; J. Garaud, J. Carlstrom, E. Babaev, Topological Solitons in Three-Band Superconductors with Broken Time Reversal Symmetry *Phys. Rev. Lett* **107** (2011) 197001; J. Jäykkä, J. Palmu, Knot Solitons in Modified Ginzburg-Landau Model *Phys. Rev. D***83** (2011) 1050