تعیین طیف جرمی و شعاع چارمونیم و باتمونیم با استفاده از روش نیکیفرو- اوارو

یزدان‌کیش، عنایت‌اله[۱]

گروه شیمی کاربردی، دانشکده نفت و گاز، دانشگاه یاسوج، گچساران،۵۶۰۰- ۷۵۸۱۳، ایران

چکیده

با حل معادله شرودینگر و به دست آوردن ویژه مقادیر و توابع موج می‌توان تمام اطلاعات لازم را راجع به سیستم کوانتومی مورد مطالعه به دست آورد. به همین منظور و برای به دست آوردن طیف جرم و شعاع کوارکونیوم، پتانسیلی شامل پتانسیل نوسانگر هماهنگ ساده، پتانسیل کولمبی و همچنین پتانسیل خطی، به عنوان پتانسیل حاکم بر سیستم کوارکونیم در نظر گرفته شد. با استفاده از روش نیکیفرو- اوارو که مبتنی بر حل معادله دیفرانسیل درجه دوم فوق هندسی می‌باشد، معادله شرودینگر در دو حد شعاع‌های کوچک و شعاع‌های بزرگ حل شد و یک جواب مجانبی برای ویژه مقادیر و توابع موج معادله شرودینگر به دست آمد، و بر آن اساس طیف جرمی و شعاع چارمونیم و باتمونیم به دست آمد. نتایج به دست آمده با نتایج آزمایشگاهی و همچنین با نتایج محاسبات تئوری که در منابع دیگری ارائه شده‌اند، مقایسه گردید که حاکی از توافق خوبی با آن نتایج می‌باشد.

کلید واژه‌ها: روش نیکیفرو- اوارو، چارمونیوم و باتمونیم، حل معادله شرودینگر.

Calculation of the radius and mass spectrum of Charmonium and Bottomonium by Nikiforov-Uvarov method

E. Yazdankish[1]

[1]Applied Chemistry Department, Faculty of Gas and Petroleum, Yasouj University, Gachsaran, 75813-56001, Iran

Abstract

Solving of the Schrodinger equation can give us the eigenvalues of energies and also the wave functions, which include all the necessary information about the quantum system under consideration. Due to this fact, in order to get the radius and mass spectrum of Quarkonium, The Schrodinger equation for a potential being the sum of a harmonic oscillator potential, a linear potential, and a Coulomb potential has been solved by the Nikiforov–Uvarov method for large and small distances between particles being in the bound state. Asymptotic expansions have been obtained for the energy levels and wave functions. The mass spectrum of heavy Quarkonia and their radius have been calculated. The results obtained are in good agreement with experimental data and with the theoretical calculations reported elsewhere.

Keywords: The Nikiforow-Uvarov method, Chamonium and Bottomonium, Solving of the Schrodinger equation.

[۱] Email: *Enayat.yazdankish@yahoo.com*

۱- مقدمه

پتانسیلی که برای توصیف برهم‌کنش حاکم بر سیستم کوانتومی چارمونیم و باتمونیم استفاده می‌شود، می‌تواند توضیح خوبی از طیف جرمی آنها ارائه دهد. به طور معمول پتانسیل کرنل[۲] با دو جمله که یکی توضیح دهنده پتانسیل کولنی بین کوارک‌ها و دیگری بیانگر پتانسیل هسته‌ای یا محدود کننده بین کوارک‌ها است، برای توضیح ساختار مزون‌ها استفاده می‌شود [۱]. اگرچه این پتانسیل به صورت معمول برای برهمکنش بین کوارک‌ها استفاده می‌شود، با این حال مساله برهم‌کنش بین کوارک‌ها به صورت یک مساله ناکامل مانده است. پتانسیل کرنل با رابطه زیر بیان می‌شود:

$$V(r) = -\frac{a}{r} + br \tag{۱}$$

در این رابطه r فاصله موثر بین دو کوارک است، a و b پارامترهایی هستند که طوری انتخاب می شوند که محاسبات جرم کوارک‌های درگیر در برهم‌کنش را به دست دهد. این تحقیق بر حل معادله شرودینگر با پتانسیلی که مجموع پتانسیل نوسانگر هماهنگ ساده، پتانسیل خطی و پتانسیل کولنی است، مبتنی است. معادله غیر نسبیتی شرودینگر تنها در مورد کوارک‌های سنگین مانند چارمونیم و باتمونیم به کار می‌رود و برای کوارک‌های سبک باید معادلات نسبیتی لحاظ شوند. این پتانسیل در بعضی مراجع مورد استفاده قرار گرفته است [۲]. با این حال حل معادله شرودینگر با این پتانسیل به صورت تحلیلی و دقیق امکان‌پذیر نیست، به همین دلیل این معادله در دو حد فاصله‌های کوچک و فاصله‌های بزرگ با استفاده از روش نیکیفرو- اوارو به صورت تحلیلی حل شده است و بر آن اساس جواب‌های معادله شرودینگر به صورت مجانبی ارائه می‌شود. روش‌های دیگری برای حل معادله شرودینگر همچون سوپر سیمتری، روش اختلالی ،روش وردشی و غیره وجود دارد ولی روش نیکیفرو- اوارو در بسیاری از حالت‌ها مناسب‌تر است. روش نیکیفرو- اوارو که مبتنی برحل معادله دیفرانسیل درجه دوم فوق هندسی است و بر ضرایب جمله‌های آن قیدهای خاصی تحمیل شده است[۳]. این روش برای حل معادلات دیگری از جمله معادله دیراک و کلاین- گوردن با پتانسیل‌های مختلف مورد استفاده قرار گرفته است، مقالات زیادی از این روش برای حل معادلات شرودینگر، دیراک با پتانسیل‌هایی همچون وودز-سکسون، هالتن، مورس و غیره استفاده برده و منتشر شده‌اند [۴]. بر همین اساس در بخش بعد روش نیکیفرو- اوارو ارائه شده است، این روش درواقع در کتابی که توسط نیکیفرو و اوارو نوشته شده بیان گردیده و مولفین پس از آنها این روش را نیکیفرو-اوارو نامیدند. در بخش ۳ معادله شرودینگر با این روش حل شده است. در بخش ۴ حالت‌های خاص یعنی پتانسیل نوسانگر و پتانسیل کولنی مورد بحث قرار گرفته و در بخش ۵ طیف جرم و شعاع‌های چارمونیم و باتمونیم محاسبه شده و در پی آن بخش نتیجه‌گیری آمده است.

۲- روش نیکیفرو- اوارو

این روش به طور خلاصه در اینجا معرفی شده و جزئیات در مرجع [۵] آورده شده است. این روش مبتنی بر حل معادله دیفرانسیل درجه دوم زیر است:

$$\psi''(s) + \frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)}\psi'(s) + \frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)}\psi(s) = 0 \,, \tag{۲}$$

در اینجا $\sigma(s)$ و $\tilde{\sigma}(s)$ چند جمله‌ای از درجه حداکثر دو می‌باشند و $\tilde{\tau}(s)$ چند جمله ای از درجه حداکثر یک می‌باشد. با جایگزینی $\psi(s) = \phi(s)\,y(s)$ و انتخاب مناسب $\phi(s)$ معادله (۲) به معادله زیر تبدیل می شود:

$$\sigma(s)\,y''(s) + \tau(s)\,y'(s) + \lambda y(s) = 0 \tag{۳}$$

که در اینجا،

[۲] cornell

$$\frac{\phi'(s)}{\phi(s)}=\frac{\pi(s)}{\sigma(s)}, \tag{۴}$$

$$\tau(s)=\tilde{\tau}(s)+2\pi(s). \tag{۵}$$

و با در نظر گرفتن معادلات (۴) و (۵) رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\pi(s)=\frac{\sigma'(s)-\tilde{\tau}(s)}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma'(s)-\tilde{\tau}(s)}{2}\right)^2-\tilde{\sigma}(s)+k\sigma(s)}. \tag{۶}$$

در معادله (۳) تابع y(s) یک چند جمله ای است که بر حسب نمایش رودریگز به صورت زیر بیان می شوند [۶]:

$$y_n(s)=\frac{B_n}{\rho(s)}\frac{d^n}{ds^n}\left[\sigma^n(s)\rho(s)\right], \tag{۷}$$

در اینجا B_n ثابت بهنجارش است و تابع وزنی $\rho(s)$ از رابطه زیر به دست می آید:

$$\left(\sigma(s)\rho(s)\right)'=\tau(s)\rho(s). \tag{۸}$$

تابع $\pi(s)$ یک چند جمله ای از درجه حداکثر یک می باشـد. بنابراین تابع زیر رادیکال (رابطه(۶)) باید توان دوم یک چند جمله ای درجه یک باشد، که شرط تعیین کننده k می باشد و از آن طریق؛

$$\lambda=k+\pi' \tag{۹}$$

معین می گردد. در این روش برای به دست آوردن ویژه مقادیر انرژی از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$\lambda=-n\tau'-\frac{n(n-1)}{2}\sigma'',\quad (n=0,1,2,\ldots) \tag{۱۰}$$

۳- حل معادله شرودینگر

به منظور به دست آوردن تابع موج سیستم کوارک و آنتی کوارک معادله شرودینگر باید حل شود. هرگاه پتانسیل $U(r)$ تقارن کروی داشـته باشد، با اسـتفاده از روش جداسازی متغیرها قسمت شعاعی معادله شرودینگر با تغییر متغیر $\chi_{nl}=rR_{nl}(r)$ به صورت زیر در می‌آید ($R_{nl}(r)$ قسمت شعاعی تابع موج است و پتانسیل کروی محاسبات را ساده می سازد):

$$\chi''_{nl}+\left[2\mu(E-U(r)-\frac{l(l+1)}{r^2})\right]\chi_{nl}=0 \tag{۱۱}$$

با جایگذاری پتانسیل $U(r)=ar^2+br-\frac{c}{r}$ و استفاده از متغیرهای $\varepsilon=2\mu E$ ، $a_1=2\mu a$ ، $b_1=2\mu b$ و $c_1=2\mu c$ معادله (۱۱) به صورت زیر در می‌آید:

$$r^2\chi''_{nl}+\left[\varepsilon r^2-a_1r^4-b_1r^3+c_1r-l(l+1)\right]\chi_{nl}=0 \tag{۱۲}$$

برای حل این معادله جوابی به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\chi_{nl}=r^{l+1}\exp(-\alpha r^2-\beta r)\omega_v(r) \tag{۱۳}$$

با جایگذاری این رابطه در معادله(۱۲) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}&r\omega''_v(r)+\left[2(l+1)+2r(-2\alpha r-\beta)\right]\omega'_v(r)+\left[2(l+1)(-2\alpha r-\beta)+r(2\alpha r+\beta)^2-2\alpha r\right.\\&\left.+\varepsilon_v r-a_1r^3-b_1r^2+c_1\right]\omega_v(r)=0\end{aligned} \tag{۱۴}$$

تابع $\omega_v(r)$ تعداد گره‌های تابع موج را مشـــخص می‌کند. برای حالت پایه تابع موج هیچ گره‌ای ندارد، بنابراین $\omega_v(r)$ برابر مقدار ثابتی است و در نتیجه معادله (۱۴) خواهد بود:

$$2(l+1)(-2\alpha r-\beta)+r(2\alpha r+\beta)^2-2\alpha r+\varepsilon_v r-a_1r^3-b_1r^2+c_1=0 \tag{۱۵}$$

با مساوی قرار دادن ضرایب جملات با توان‌های یکسان r روابط زیر را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}&(1)\ c_1-2\beta(l+1)=0\\&(2)\ \beta^2-4\alpha(l+1)-2\alpha+\varepsilon_0=0\\&(3)\ 4\alpha\beta-b_1=0\\&(4)\ 4\alpha^2-a_1=0\end{aligned} \tag{۱۶}$$

این تساوی‌ها معادله (۱۴) را به صورت زیر در می‌آورد ($\vartriangle\varepsilon_v=\varepsilon_v-\varepsilon_0$).

$$\omega_v''(r)+\left[\frac{2(l+1)}{r}-4\alpha r-2\beta\right]\omega_v'(r)+\vartriangle\varepsilon_v\omega_v(r)=0 \tag{۱۷}$$

حل این معادله را به ازای مقادیر کوچک و بزرگ r محاســـبه می‌کنیم. برای r های بزرگ $r\to\infty$ معادله (۱۶) به صـــورت زیر در می‌آید.

$$\omega_v''(r)+-\left(4\alpha r+2\beta\right)\omega_v'(r)+\Delta\varepsilon_v\omega_v(r)=0 \tag{۱۸}$$

برای حـل این معـادلـه از روش نیکیفرو- اوارو اســـتفـاده می‌کنیم. بـا مقـایســـه رابطـه (۱۷) بـا رابطـه (۲) بـه دســـت می‌آوریم: $\tilde{\tau}(r)=-4\alpha r-2\beta$، $\sigma(r)=1$ و $\tilde{\sigma}(r)=\vartriangle\varepsilon_v$ و در نتیجه از رابطه (۶) خواهیم داشت:

$$\pi(r)=\frac{4\alpha r+2\beta}{2}\pm\sqrt{\frac{4\alpha r+2\beta}{2}-\vartriangle\varepsilon_v+k} \tag{۱۹}$$

در اینجا $\pi(r)$ یک چند جمله‌ای از درجه حداکثر یک می‌باشـــد، بنابراین عبارت زیر رادیکال باید مربع یک چند جمله‌ای از درجه حداکثر یک باشـد و با در نظر گرفتن این قید مقدار ثابت k را به دسـت خواهیم آورد، در نتیجه $k=\Delta\varepsilon_v$. با اسـتفاده از این مقدار k، دو جواب برای $\pi(r)$ به دسـت می‌آید و جوابی از لحاظ فیزیکی معتبر اسـت که در نتیجه آن شـیب رابطه $\tau(r)=\tilde{\tau}(r)+2\pi(r)$ منفی شود و در نتیجه $\pi(r)=0$. با استفاده از رابطه (۴) و روابط (۷) تا (۱۰) خواهیم داشت:

$$\Delta\varepsilon_v=\varepsilon_v-\varepsilon_0=4\alpha v+4\alpha l \tag{۲۰}$$

$$\omega_v(r)=\frac{B_v}{\exp\left(-2\alpha r^2-2\beta r\right)}\frac{d^v}{dr^v}\exp\left(-2\alpha r^2-2\beta r\right) \tag{۲۱}$$

برای حل معادله (۱۷) به ازای r های کوچک این معادله به صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$\omega_v''(r)+\left[\frac{2(l+1)-2\beta r}{r}\right]\omega_v'(r)+\vartriangle\varepsilon_v\omega_v(r)=0 \tag{۲۲}$$

حل این معادله با اســتفاده از روش نیکیفرو- اوارو شــبیه حل معادله (۱۸) اســت که در بالا ارائه گردید، و به همین روش ویژه مقادیر و توابع موج آن به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\Delta\varepsilon_v=\beta^2-\frac{(l+1)^2\beta^2}{(l+v+1)^2} \tag{۲۳}$$

$$\omega_{vl}(r)=\frac{B_{vl}}{r^{2l+1}}\exp\left(2\sqrt{\beta^2-\Delta\varepsilon_v r}\right)\frac{d^v}{dr^v}\exp\left[r^{v+2l+1}\left(-2\sqrt{\beta^2-\Delta\varepsilon_v r}\right)\right] \tag{۲۴}$$

۴- حالت‌های خاص پتانسیل‌های کولن ونوسانگر هماهنگ ساده

اینک حالت های خاص را در اینجا در نظر می‌گیریم، اگر $a=b=0$ باشد آنگاه پتانسل مورد نظر به پتانسیل کولنی تبدیل می‌شود. در این حالت با استفاده از معادله (۱۶) $\alpha=0$ می‌شود و در نتیجه معادلات (۱۶) به روابط زیر تبدیل می‌شوند:

$$\begin{aligned}&(1)\ c_1-2\beta(l+1)=0\\&(2)\ \beta^2+\varepsilon_0=0\end{aligned} \quad (۲۵)$$

و ویژه مقادیر به صورت زیر در خواهند آمد:

$$\varepsilon=-\frac{\mu^2c^2}{(l+v+1)^2} \quad (۲۶)$$

و توابع ویژه با رابطه زیر به دست می‌آیند:

$$\omega_{vl}(r)=\frac{B_{vl}}{r^{2l+1}}\exp\left(2\sqrt{\frac{(l+1)^2\beta^2}{(l+v+1)^2}}\right)\frac{d^v}{dr^v}\exp\left[r^{v+2l+1}\left(-2\sqrt{\frac{(l+1)^2\beta^2}{(l+v+1)^2}}\right)\right] \quad (۲۷)$$

اگر در پتانسیل داده شده $b=c=0$ باشد آنگاه پتانسیل نوسانگر هماهنگ ساده به دست می‌آید. بر اساس معادله (۱۷) در این حالت $\beta=0$ است. در نتیجه معادله (۱۷) به روابط زیر ختم می‌شود و بر آن اساس ویژه مقادیر و توابع موج به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}&(1)\ -4\alpha(l+1)-2\alpha+\varepsilon_0=0\\&(2)\ 4\alpha^2-a_1=0\end{aligned} \quad (۲۸)$$

در این حالت ویژه مقادیر و توابع موج با روابط زیر داده می‌شوند:

$$\varepsilon_v=\varepsilon_0+4\alpha v \quad (۲۹)$$

$$\omega_v(r)=\frac{B_v}{\exp\left(-2\alpha r^2\right)}\frac{d^v}{dr^v}\exp\left(-2\alpha r^2\right) \quad (۳۰)$$

بنابراین روشی که در اینجا توضیح داده شد، هنگامی که برای یک ذره‌ی تحت تاثیر پتانسیل کولنی یا پتانسیل نوسانگر هماهنگ ساده، مورد استفاده قرار می‌گیرد به نتایج آشنایی که قبلا برای این پتانسیل‌ها به دست آمده است منجر می‌شود.

۵- طیف انرژی و جرم چارمونیم و باتمونیم

اکنو ن با استفاده از روشی که در بالا توضیح داده شد، طیف جرم کوارکونیوم‌های سنگین که از یک کوارک و یک آنتی کوارک با طعم یکسان ساخته شده‌اند را به دست می‌آوریم. با در نظر گرفتن فرمول‌هایی که برای طیف انرژی برای دو حالت فاصله‌های کوچک و فاصله‌های بزرگ به دست آمد و با ترکیب آنها رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\Delta\varepsilon_v=4\alpha tv+\beta^2-\frac{(l+1)^2\beta^2}{(l+v+1)^2}+4\alpha l \quad (۳۱)$$

برای به دست آوردن شعاع‌های چارمونیم و باتمونیم از قضیه ویریال [۷] استفاده می‌کنیم، که میانگین انرژی جنبشی را مطابق رابطه زیر به پتانسیل ارتباط می‌دهد.

$$\langle T\rangle=\frac{1}{2}\left\langle r\frac{dU(r)}{dr}\right\rangle \quad (۳۲)$$

با پتانسیلی که در این مقاله ارائه شده، $U(r)=ar^2+br-\frac{c}{r}$ خواهیم داشت:

$$E = 2a\langle r^2\rangle + \frac{3b\langle r\rangle}{2} - \frac{c}{2\langle r\rangle} \tag{۳۳}$$

$$M = 2m + 2a\langle r^2\rangle + \frac{3b\langle r\rangle}{2} - \frac{c}{2\langle r\rangle} \tag{۳۴}$$

جدول ۱: طیف جرم و شعاع چارمونیم ($m = 1488.35MeV$ ، $a = 0.042GeV^3$ ، $b = 0.255GeV^2$ ، $c(l=0) = 1.0188$ و $t = 0.891$)

حالت	جرم MeV	نتایج تجربی	$\langle r\rangle$ fm
1S	۳۰۹۶	۳۰۹۶	۰.۲۳۲
1P	۳۴۳۳		۰.۳۷۲
2S	۳۶۸۶	۳۶۸۶	۰.۳۶۷
1D	۳۷۷۰	۳۷۷۰	۰.۴۸۴
2P	۴۰۲۳		۰.۴۹۳
3S	۴۰۴۰	۴۰۴۰	۰.۴۵۰
4S	۴۳۵۸	۴۴۱۵	۰.۵۲۳

در جداول ۱ و ۲ طیف جرم و شعاع تعدادی از حالت‌های چارمونیوم و باتمونیم داده شده و با مقادیر تجربی [۸] مقایسه شده است. همانطور که از جداول ۱ و ۲ دیده می شود با انتخاب مقادیر مناسب ضرایب پتانسیل می‌توان به یک توافق خوبی با نتایج تجربی رسید. دقت اعداد جدول وابسته به دقت m می‌باشدکه استفاده شده است و از درجه 0.01MeV می‌باشد.

جدول ۲: طیف جرم و شعاع باتمونیم ($m = 4686.125MeV$ ، $a = 0.143GeV^3$ ، $b = 0.465GeV^2$ ، $c(l=0) = 0.57$ و $t = 0.8$)

حالت	**جرم MeV**	**نتایج تجربی**	$\langle r\rangle$ **fm**
1S	۹۴۶۰	۹۴۶۰	۰.۱۳۱
1P	۹۸۱۱	۹۹۰۰	۰.۲۰۹
2S	۱۰۰۲۳	۱۰۰۲۳	۰.۲۰۲
1D	۱۰۱۶۱	۱۰۱۶۱	۰.۲۷۲
2P	۱۰۳۷۴	۱۰۲۶۰	۰.۲۷۲
3S	۱۰۳۵۵	۱۰۳۵۵	۰.۲۴۴
4S	۱۰۶۵۵	۱۰۵۸۰	۰.۲۸۱

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله حل مجانبی معادله شرودینگر با پتانسیلی که مجموع پتانسیل نوسانگر هماهنگ ساده، پتانسیل خطی و پتانسیل کولنی است، به دست آمد. این روش نسبت به روش اختلالی که معمولا استفاده می‌شود، ساده‌تر و مناسب‌تر است. برای پتانسیل کولن و همچنین پتانسیل نوسانگر هماهنگ ساده تابع موج‌ها به صورت دقیق به دست آمدند. در این مقاله به طور خاص جواب معادله شرودینگر به ازای فاصله‌های کوچک و بزرگ به طور مجانبی به دست آمد. محاسبات نشان داد که این روش توضیح خوبی از حالات پایه چارمونیم و باتمونیم ارائه می‌دهد و طیف جرم و شعاع آنها را به خوبی ارائه می‌دهد[۹]. در حالت‌های 1S، 1P و 1D جمله کولنی پتانسیل غالب می‌شود و در دیگر حالت‌های محاسبه شده پتانسیل‌های خطی و نوسانگر پتانسیل غالب می‌شوند.

مراجع

[۱] M. I. Jamil, S. S. Gilani, A. Wasif, A. S. Khan, and A. Awan, "J/ψ-J/ψ scattering cross sections of Quadratic and Cornell Potentials," *Chinese Physics C,* 2020.

[۲] B. G. e. Idlis, M. Musakhanov, and M. S. Usmanov, "Application of supersymmetry and factorization methods to solution of dirac and Schrödinger equations," *Theoretical and Mathematical Physics,* vol. 101, no. 1, pp. 1191-1199, 1994.

[۳] E. Yazdankish, "Solving of the Schrodinger equation analytically with an approximated scheme of the Woods-Saxon potential by the systematical method of Nikiforov-Uvarov," *International Journal of Modern Physics E,* vol. 29, no. 6, pp. 2050032-273, 2020.

[٤] A. Ahmadov, S. M. Nagiyev, M. Qocayeva, K. Uzun, and V. Tarverdiyeva, "Bound state solution of the Klein–Fock–Gordon equation with the Hulthén plus a ring-shaped-like potential within SUSY quantum mechanics," *International Journal of Modern Physics A,* vol. 33, no. 33, p. 1850203, 2018.

[٥] A. F. Nikiforov and V. B. Uvarov, *Special functions of mathematical physics*. Springer, 1988.

[٦] C. Berkdemir, "Application of the nikiforov-uvarov method in quantum mechanics," *Theoretical Concepts of Quantum Mechanics,* p. 225, 2012.

[۷] G. Marc and W. McMillan, "The virial theorem," *Adv. Chem. Phys,* vol. 58, pp. 209-361.۱۹۸٥ ,

[۸] R. M. Barnett *et al.*, "Review of particle physics," *Physical Review D,* vol. 54, no. 1, p. 1, 1996.

[۹] E. Eichten, K. Gottfried, T. Kinoshita, K. Lane, and T.-M. Yan, "Charmonium: the model," *Physical Review D,* vol. 17, no. 11, p. 3090, 1978.