



گذر فاز کوانتومی در هسته‌های زوج و فرد با استفاده از مدل جبری سه خوشه‌ای

مریم قپانوری^{۱*}، نرجس امیری^۲، محمد علی جعفریزاده^۳

^{۱*} پژوهشکده پلاسما و گداخت هسته‌ای، پژوهشگاه علوم و فنون هسته‌ای، ۵۱۱۱۳-۱۴۳۹۹، تهران، ایران

^۲ گروه فیزیک هسته‌ای، دانشکده فیزیک، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران

^۳ گروه فیزیک نظری، دانشکده فیزیک، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران

چکیده:

مدل جبری خوشه‌ای (ACM)^۱ بر اساس مدل برهم کنش بوزونی است که برای توصیف حرکت نسبی خوشه با در نظر گرفتن درجات آزادی ارتعاشی و چرخشی بکار می‌رود. در این مقاله، با استفاده از جبر آفین $SU(1,1)$ هامیلتونین مدل جبری خوشه‌ای سه جسمی برای ناحیه گذار $O(7) \leftrightarrow U(6)$ ارائه شده است. ما از این روش برای مطالعه ساختار هسته‌های فرد مانند ^{14}N ، ^{13}N و ^{13}C استفاده کردیم. نتایج عددی مربوط به سطوح انرژی، مقدار انتظاری عملکرد عملگر شماره بوزون برحسب تابعی از پارامترهای کنترل این هامیلتون ارائه شده است. تأثیر جفت‌شدگی ذرات فرد به هسته بوزونی زوج-زوج در منطقه گذار و به ویژه در نقطه بحرانی بحث شده است.

کلیدواژه‌ها: مدل جبر خوشه‌ای، جبر آفین $SU(1,1)$ ، گذار فاز کوانتومی، سطوح انرژی

Quantum phase transition in even and odd nuclei by using algebraic three-cluster model

Maryam Ghapanvari^{1*}, Narjes Amiri², Mohammad Ali Jafarizadeh³

^{1*} Plasma and Nuclear Fusion Research School, Nuclear Science and Technology Research Institute, 14399-51113, Tehran, Iran

²Department of Nuclear Physics, Faculty of Physics, University of Tabriz, Tabriz, Iran

³Department of Theoretical Physics, Faculty of Physics, University of Tabriz, Tabriz, Iran

Abstract:

The Algebraic Cluster Model (ACM) is an interacting boson model that describes the relative motion of the cluster configurations in which all vibrational and rotational degrees of freedom are present from the outset. In this paper, a solvable extended transitional Hamiltonian is presented based on affine $SU(1, 1)$ Lie algebra within the framework for three-body algebraic cluster models that describes region $U(6) \leftrightarrow O(7)$. We suggest that this method can be used to study such as structures ^{14}N , ^{13}N , ^{13}C . Numerical extraction to the energy levels, the expectation value of boson number operator function within the control parameters of this evaluated Hamiltonian are presented. The effect of the coupling of the odd particle to an even-even boson core is discussed along the shape transition and, in particular, at the critical point.

Keywords: Algebraic Cluster Model, Affine $SU(1, 1)$, shape transition.

۱. مقدمه

با نگاهی به نمودار تجربی انرژیهای بستگی به ازای هر نوکلئون مشاهده میشود که هسته‌های سبک، با افزایش تعداد نوکلئونها متحمل نوسانهای بزرگی می‌شوند که بیشینه‌های این نوسانها در هسته‌های با عدد جرمی $Z=N$ و $A=4n$ رخ میدهند. هسته‌هایی که در این بیشینه‌ها قرار دارند به ازای $n=\{1,2,3,4\}$ به ترتیب ${}^4\text{He}$ ، ${}^{12}\text{C}$ ، ${}^{16}\text{O}$ می‌باشند که به نوعی بیانگر خوشه بندی آلفا در این هسته‌ها است [۱-۳]. مطالعه ساختار خوشه‌های هسته‌های سبک به دهه ۳۰ میلادی برمیگردد. پیشگامان این عرصه افرادی چون ویلر [۴]، "هفستارد و تلر" [۲ و ۵]، دنیسون [۶] و کامنی [۷] بودند. بدنبال کارهای آنها وایلدروموس و کالن پولوس [۸] توانستند مدل خوشه‌ای را به مدل لایه ای مرتبط کنند. روند توسعه مدلهای خوشه ای را میتوان در مقالات مروری [۹-۱۴] دید. از میان این روشها، مدلهای ACM برای مطالعه سیستم‌های بس- ذره ای و چند ذره ای، کارآمد می‌باشند. در ACM بجای حل معادلات دیفرانسیل در فضای مختصات میتوان با قطری کردن هامیلتونین سیستم، ویژه مقادیر انرژی و ویژه بردارها را بدست آورد. مدل اندرکنش بوزونی^۲ (IBM) نمونه شاخصی از مدلهای جبری است که در توصیف حالات جمعی هسته های زوج - زوج بسیار موفق بوده است [۱]. برای توصیف حالات خوشه های- α در هسته‌های سنگین در چارچوب ACM میتوان به دو ساختار جبری معروف اشاره کرد [۱۵]. نخست ساختاری که به کمک گروه $U(6)$ توصیف می‌شود. مولدهای این ساختار جبری بوزونهای s و d هستند. در این ساختار درجات آزادی چهار قطبی مسئول تغییر شکل هسته می‌باشند. ساختار دیگر به کمک گروه $U(4)$ توصیف می‌شود که مولدهای آن بوزونها s و d هستند. در اینجا درجات آزادی دوقطبی عامل خوشه‌بندی می‌باشد [۱۶ و ۱۷].

در این مقاله، گذار فاز کوانتومی^۳ (QPT) در ناحیه گذار ارتعاشی به چرخنده گامای ناپایدار $O(7) \leftrightarrow U(6)$ (در چارچوب مدل ACM برای هسته‌های سه خوشه‌ای مورد بررسی قرار گرفت. ما این روش را برای توصیف هسته‌های ${}^{13}\text{N}$ ، ${}^{14}\text{N}$ و ${}^{13}\text{C}$ بکار می‌گیریم. این مدل را می‌توان با استفاده از یک روش جبری بی نهایت بعدی در چارچوب (IBM) حل کرد. در اینجا برای توصیف QPT، از مشاهدپذیرهایی مانند انرژی ترازاها، تقاطع ترازای استفاده می‌شود.

۲. روش کار

جبر حاکم بر مدل جبری خوشه‌ای، جبر یکانی $U(v+1)$ است که در آن $v = 3(n-1)$ بیانگر تعداد درجه‌های آزادی فضایی است. درجه‌های آزادی سیستم n خوشه‌ای با $(n-1)$ مختصه ژاکوبی، بصورت زیر داده می‌شود:

$$\vec{\rho}_k = \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} \left(\sum_{i=1}^k \vec{r}_i - k\vec{r}_{k+1} \right) \quad (1)$$

$$k = 1, 2, \dots, n-1$$

در اینجا r_i و k بترتیب بردار موقعیت خوشه - i ام و شماره خوشه می‌باشند. در ACM از روش کوانتش بوزونی با بوزونهای برداری (یا دوقطبی) و اسکالر (یا تک قطبی) بجای مختصات نسبی ژاکوبی استفاده شده است. در اینجا پایستگی تعداد بوزونها بعنوان یک قید بایستی همواره برقرار باشد. برای هر مختصه نسبی مستقل، از مختصات ژاکوبی، بوزون برداری با $L_p = 1^-$ و بوزون اسکالر با $L_p = 0^+$ عبارتند از [۱۸]:

$$s^\dagger, b_{k,m}^\dagger, \quad m = -1, 0, 1 \quad (2)$$

عملگر تعداد کل بوزونها به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$N = s^\dagger s + \sum_k \sum_m b_{k,m}^\dagger b_{k,m} = n_s + \sum_k n_k = \sum_i c_i^\dagger c_i \quad (3)$$

² Interacting Boson Model

³ Quantum Phase Transition

این عملگر با هامیلتونین سیستم جابجا میشود. حالات خوشه به کمک ACM در جملاتی از بوزونهای برداری و اسکالر برهمکنش کننده توصیف میشوند. این بوزونها روی هم رفته یک فضای برداری $3n-2$ بعدی با ساختار گروهی $U(3n-2)$ ایجاد می‌کنند. حالات این سیستم مطابق با نمایش تقلیل ناپذیر کاملاً متقارن $[N]$ ، طبقه بندی می‌شوند که در آن N تعداد کل بوزونها می‌باشد. در مورد خوشه‌های یکسان، هامیلتونین سیستم بایستی تحت جایگشت‌ها ناوردا باقی بماند. این حالات مطابق با نمایشهای متناظر با گروه جایگشتی S_n تبدیل می‌شوند [۳]. هامیلتونین چنین سیستمی با در نظر گرفتن برهمکنشهای دو جسمی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H = \sum_{ij} \varepsilon_{ij} G_{ij} + \sum_{ijkl} v_{ijkl} G_{ij} G_{kl}, \quad G_{ij} = c_i^\dagger c_j \quad (4)$$

که در آن ε_{ij} و v_{ijkl} ضرایب ثابتی از جنس انرژی هستند. ویژه مقادیر این سیستم n خوشه‌ای با قطری سازی هامیلتونین (۴) امکان پذیر است که در بخش بعدی به آن می‌پردازیم. زنجیره‌های جبری مورد نظر در این مقاله عبارتند از:

$$U(3n-2) \supset \left\{ \begin{array}{l} U(3n-3) \\ O(3n-2) \end{array} \right\} \supset O(3n-3)$$

که برای توصیف رفتار سیستمهای n خوشه‌ای بکار می‌روند.

۱-۲. زنجیره جبری، هامیلتونین، تابع موج و طیف انرژی هسته زوج-زوج سه خوشه‌ای (^{12}C)

$$U^B(7) \supset \left\{ \begin{array}{l} U^B(6) \\ O^B(7) \end{array} \right\} \supset O^B(6) \supset O^B(3)$$

$$H = gS_0^+ S_0^- + \alpha S_1^0 + \beta C_2(O^B(6)) + \gamma C_2(O^B(3))$$

$$|k, v_s v_{b_1} v_{b_2} n_\Delta LM\rangle = \theta S_{x_1}^+ S_{x_2}^+ \dots S_{x_k}^+ |lw\rangle^B$$

$$E^{(k)} = h^{(k)} + \alpha \Lambda_1^0 + \beta v(v+4) + \gamma L(L+1)$$

$$\Lambda_1^0 = c_s^2 \left(v_s + \frac{1}{2} \right) + c_{b_1}^2 \left(v_{b_1} + \frac{1}{2} \right) + c_{b_2}^2 \left(v_{b_2} + \frac{1}{2} \right)$$

۲-۲. زنجیره جبری، هامیلتونین، تابع موج و طیف انرژی هسته‌های زوج-فرد سه خوشه‌ای (^{13}N و ^{13}C)

$$U^B(7) \otimes U^F(2) \supset \left\{ \begin{array}{l} U^B(6) \\ O^B(7) \end{array} \right\} \otimes SU^F(2) \supset O^B(6) \otimes SU^F(2) \supset O^B(3) \otimes SU^F(2) \supset Spin^{BF}(3)$$

$$H = gS_0^+ S_0^- + \alpha S_1^0 + \beta \hat{C}_2(O^B(6)) + \gamma \hat{C}_2(O^B(3)) + \rho \hat{C}_2(Spin^{BF}(3))$$

$$|k, v_s v_{b_1} v_{b_2} n_\Delta LJM\rangle = \theta S_{x_1}^+ S_{x_2}^+ \dots S_{x_k}^+ |lw\rangle^{BF}$$

$$|lw\rangle^{BF} = \pm \sqrt{\frac{L \pm M_L + \frac{1}{2}}{(2L+1)}} |lw\rangle^B \chi_+ + \sqrt{\frac{L \mp M_L + \frac{1}{2}}{(2L+1)}} |lw\rangle^B \chi_-$$

$$E^{(k)} = h^{(k)} + \alpha \Lambda_1^0 + \beta v(v+4) + \gamma L(L+1) + \rho J(J+1)$$

$$h^{(k)} = \sum_{i=1}^k \frac{\alpha}{x_i} = \sum_{i=1}^k \frac{g c_s^2 (v_s + 0.5)}{1 - c_s^2 x_i} + \frac{g c_{b_1}^2 (v_{b_1} + 1.5)}{1 - c_{b_1}^2 x_i} + \frac{g c_{b_2}^2 (v_{b_2} + 1.5)}{1 - c_{b_2}^2 x_i} - \sum_{j \neq i} \frac{2g}{x_i - x_j}$$

۳-۲. زنجیره جبری، هامیلتونین، تابع موج و هسته‌های فرد-فرد سه خوشه‌ای (^{14}N)

$$U^B(7) \otimes (U^{F\pi}(2) \otimes U^{F\nu}(2)) \supset \left\{ \begin{matrix} U^B(6) \\ O^B(7) \end{matrix} \right\} \otimes U^{F\pi\nu}(2) \supset O^B(3) \otimes SU^{F\pi\nu}(2) \supset O_{\pi\nu}^{BF}(3)$$

$$H = gS_0^+ S_0^- + \alpha S_1^0 + \beta \hat{C}_2(O^B(6)) + \gamma \hat{C}_2(O^B(3)) + \gamma' \hat{C}_2(SU^{F\pi\nu}(2)) + \rho \hat{C}_2(Spin^{BF}(3))$$

$$\left| k, \nu_s \nu_{b_1} \nu_{b_2} (\zeta_1, \zeta_2), n_\Delta SL, JM \right\rangle = \theta S_{x_1}^+ S_{x_2}^+ \dots S_{x_k}^+ |lw\rangle^{BF_{\pi\nu}}$$

$$|lw\rangle^{BF_{\pi\nu}} = \sum_{m_\pi, m_\nu, m_{\pi\nu}, M} C_{m_\pi, m_\nu, m_{\pi\nu}}^{j_\pi, j_\nu, j_{\pi\nu}} C_{M, m_{\pi\nu}, M_L}^{j_\pi, j_\nu, L} |j_\pi, m_\pi\rangle |j_\nu, m_\nu\rangle |lw\rangle^B$$

$$E^{(k)} = h^{(k)} + \alpha \Lambda_1^0 + \beta \nu(\nu + 4) + \gamma L(L + 1) + \gamma' S(S + 1) + \rho J(J + 1)$$

ضرایب طیف را به کمک روش برازش حداقل مربعات با استفاده از داده‌های تجربی محاسبه می‌شود.

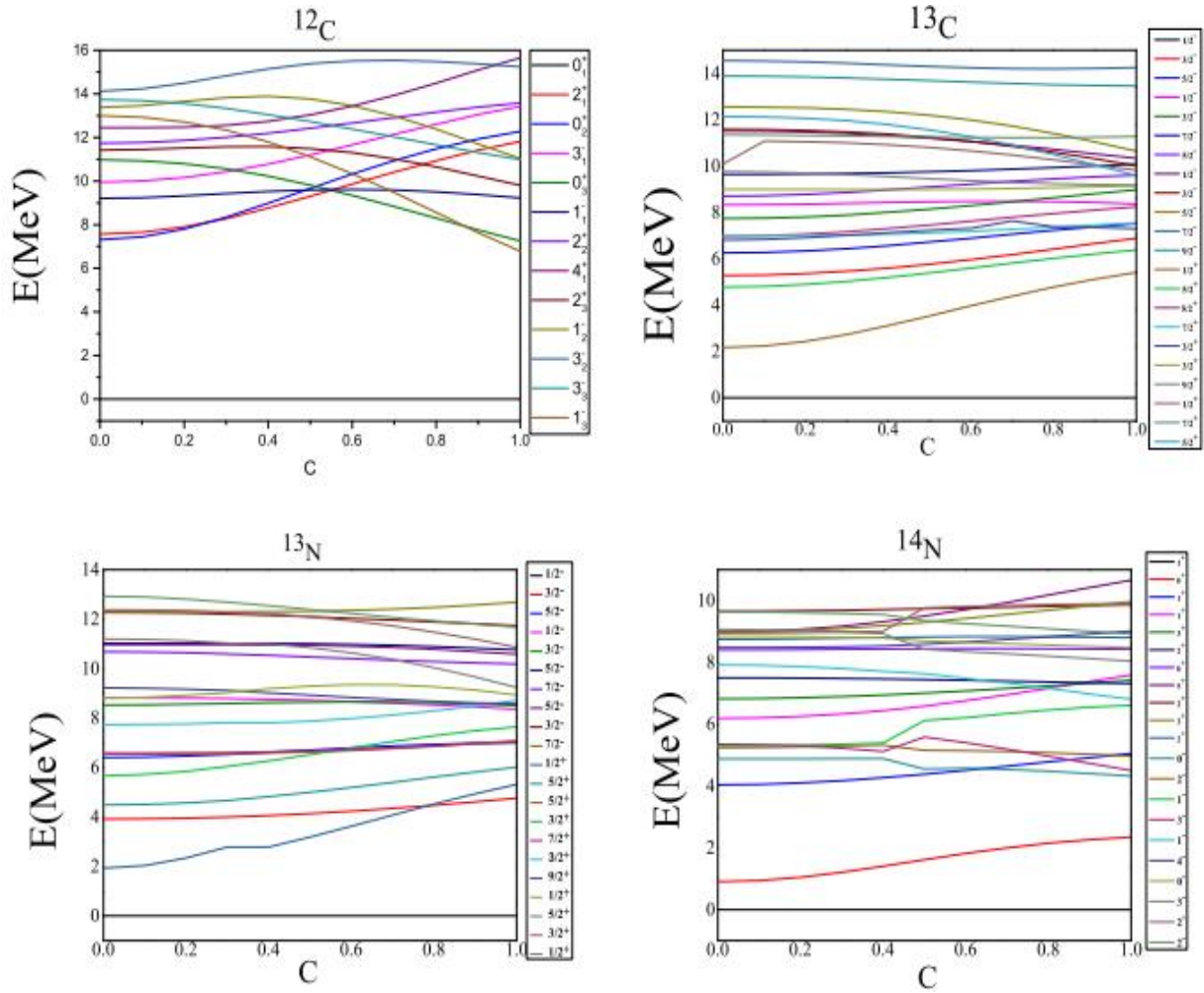
۳. نتایج

در این بخش نتایج حاصل از محاسبات عددی قابل مشاهده از ACM برای هسته‌های سه خوشه‌ای ارائه شده است. ما در این مقاله، هسته‌های ^{13}C و $^{12}\text{C}, ^{13}\text{N}, ^{14}\text{N}$ را مورد بررسی قرار دادیم. طیف انرژی مهم‌ترین مشاهده‌پذیر فیزیکی در یک سیستم کوانتومی می‌باشد. در اینجا با توجه به مقادیر تجربی، طیف انرژی را برای ^{13}C و $^{12}\text{C}, ^{13}\text{N}, ^{14}\text{N}$ در چارچوب ACM محاسبه می‌کنیم. برای بدست آوردن طیف انرژی بایستی پارامترهای ثابت طیف انرژی را بدست آورد. برای این منظور ابتدا بایستی معادلات غیر خطی بٹ را حل کرده و پارامترهای طیفی x_i را به ازای مقادیر مختلف k محاسبه کرد. با استفاده از داده‌های تجربی و پارامترهای طیفی می‌توانیم ثابت‌های طیف انرژی را تقریب بزنیم. فرایند برآورد ضرایب ثابت بر اساس روش برازش حداقل مربعات می‌باشد، بطوریکه انحراف معیار استاندارد به حداقل مقدار ممکن خود برسد. برای انجام این محاسبات ما از برنامه متلب^۴ استفاده کردیم. نتایج حاصل از محاسبات عددی و نظری در شکل

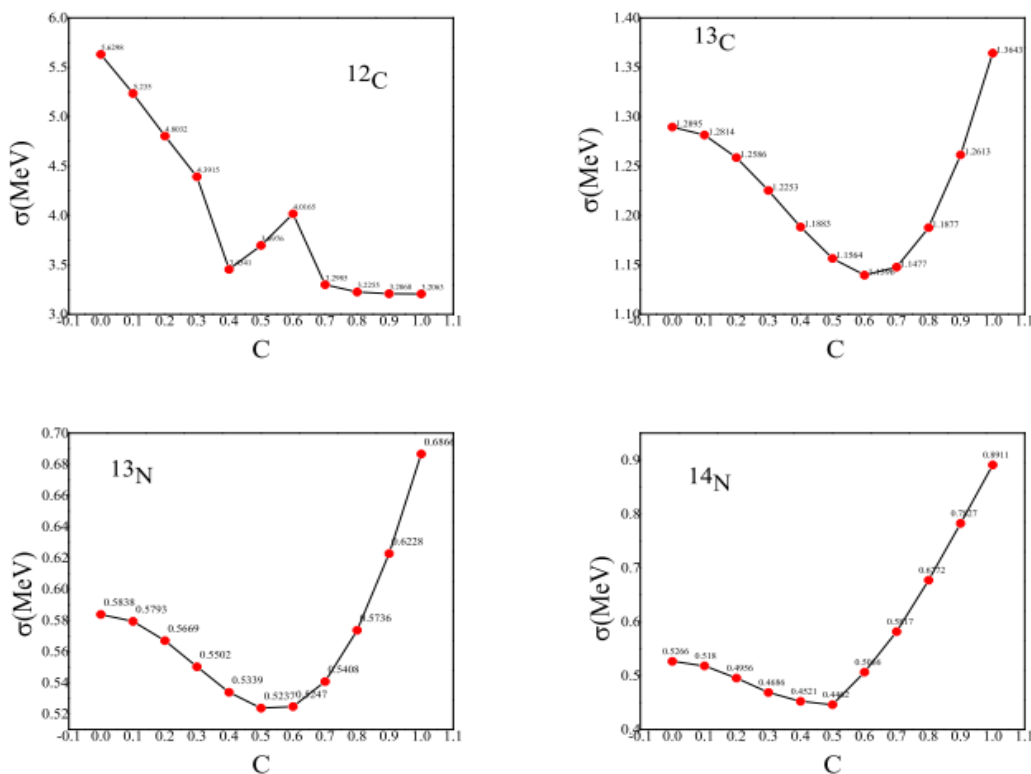
(۱) ارائه شده است. خطای میانگین مربعات $\sigma = \left(\frac{1}{N_{tot}} \sum_{i=1}^N |E_{exp}^i - E_{cal}^i|^2 \right)^{1/2}$ طیف انرژی محاسبه شده و مقادیر تجربی بصورت تابعی

از پارامتر کنترلی $C = \frac{c_s}{c_b}, c_{b_1} = c_{b_2} = c_b$ برای این هسته‌ها در شکل (۲) نشان داده شده است.

⁴ MATLAB



شکل ۱. سطح انرژی به عنوان تابعی از پارامتر کنترل C برای هسته‌های سه خوشه‌ای



شکل ۲. خطای میانگین مربعات به عنوان تابعی از پارامتر کنترل C برای هسته‌های سه خوشه‌ای

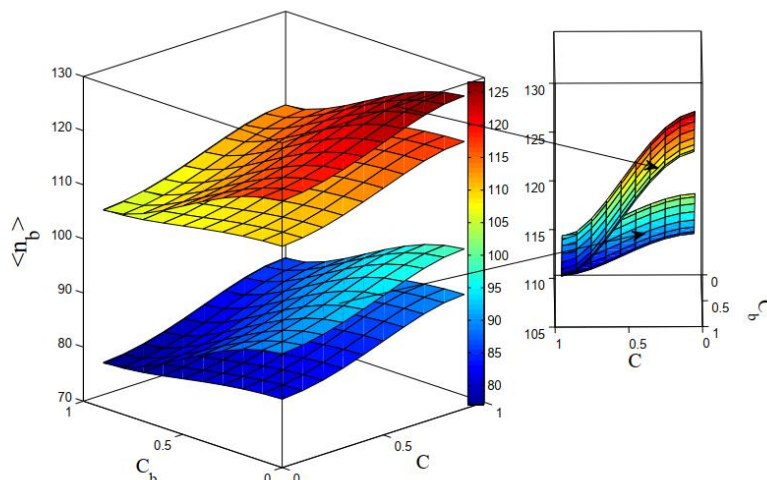
در هسته‌های سه خوشه‌ای، خطای میانگین به ترتیب در $C=0.4$ برای ^{12}C ، $C=0.6$ برای ^{13}C ، $C=0.5$ برای ^{13}N و $C=0.5$ برای ^{14}N مینیمم می‌باشد. بنابراین برای توصیف این هسته‌ها این مقادیر کنترل پارامترها بهینه مقدار می‌باشد. همانطور که از مقادیر کنترل پارامترها مشخص است افزودن تک نوکلئون به هسته زوج-زوج موجب جابجایی مقدار کنترل پارامتر بهینه در هسته‌های A فرد و فرد-فرد شده است.

مشاهده‌پذیر مقادیر انتظاری اپراتور عدد b بوزون به مربع پارامتر کلاسیکی β (پارامتر تغییر شکل) وابسته است. بنابراین این یک کمیت مناسب برای بررسی گذار فاز است. ما این کمیت را در هسته زوج-زوج سه خوشه‌ای بصورت زیر محاسبه کردیم

$$\langle \hat{n}_b \rangle = \frac{2C_s^2 C_b^2 (\Lambda_0^0 + k) - 2(C_s^2 + C_b^2) (\Lambda_1^0 + k \sum_{i=1}^k y_i^{-1}) + 2(\Lambda_2^0 + k \sum_{i=1}^k y_i^{-2})}{(1 - C_s^2)(1 - C_b^2)} - \frac{3}{2} \quad (5)$$

شکل (۳) نحوه تغییرات مقادیر انتظاری اپراتور عدد b بوزون را برای پایین‌ترین حالت هسته زوج-زوج سه خوشه‌ای بصورت تابعی از کنترل پارامترها نشان می‌دهد.

از شکل (۳) می‌توان دریافت که برای هر تکانه زاویه‌ای (n_b) تقریباً برای $C \leq 0.5$ ثابت باقی می‌ماند و تنها در $C > 0.5$ شروع به تغییر سریع می‌کند. ثابت ماندن این اپراتورها برای $C < 0.5$ یک شاهد واضح برای حفظ تقارن دینامیکی ارتعاشی در این منطقه است و برای $0.65 \leq C \leq 1$ مقادیر n_b شروع به تغییر سریع می‌کند.



شکل (۳). نحوه تغییرات مقادیر انتظاری اپراتور عدد b بوزون بصورت تابعی از کنترل پارامترها

۴. نتیجه‌گیری

در این مقاله، گذار فاز مدل‌های مبتنی بر ACM را برای هسته‌های ^{13}C و $^{13}\text{C}, ^{13}\text{N}, ^4\text{N}$ در ناحیه گذار $O(7) \leftrightarrow U(6)$ مطالعه کردیم. بدین منظور از هامیلتونهای گذار حل‌پذیری که مبتنی بر جبر $SU(1,1)$ است، استفاده کردیم. اعتبار پارامترهای ارائه شده در چارچوب خوشه-IBM و خوشه-IBFM مورد بررسی قرار گرفته است و مشاهده می‌شود که بین نتایج ارائه شده و داده‌های تجربی توافق خوبی وجود دارد. نتایج به دست آمده در این مطالعه تأیید می‌کند که روش ACM برای بررسی هسته‌های زوج-زوج، A فرد و فرد-فرد قابل استفاده است. یک تحلیل از گذار فاز کوانتومی در یک سیستم متشکل از N بوزون و یک فرمیون ارائه داده و نشان دادیم که افزودن یک فرمیون مقدار بحرانی را که در آن مرحله گذار رخ می‌دهد تا حد زیادی تغییر می‌دهد. مطالعات ما اهمیت هسته‌های فرد را به عنوان نشانه‌های لازم برای توصیف وقوع گذار فاز و تعیین موقعیت دقیق نقطه بحرانی را تأیید می‌کند.

۵. مراجع

1. F. Iachello and A. Arima, *The Interacting Boson Model* (Cambridge U. Press, Cambridge, 1987).
2. F. Iachello and R. D. Levine, *Algebraic Theory of Molecules*, (Oxford U. Press, Oxford, 1995).
3. R. Bijker and F. Iachello, *Nucl. Phys. A* 957 (2017) 154.
4. J. A. Wheeler, *Phys. Rev.* 52 (1937) 1083.
5. L. R. Hafstad, E. Teller, *Phys. Rev.* 54 (1938) 681.
6. D. M. Dennison, *Phys. Rev.* 96 (1954) 378.
7. S. L. Kameny, *Phys. Rev.* 103 (1956) 358.
8. K. Wildermuth, T. Kanellopoulos, *Nucl. Phys. A* 7 (1958) 150.
9. W. von Oertzen, M. Freer, Y. Kanada-En'yo, *Phys. Rep.* 432 (2006) 43.
10. Y. Kanada-En'yo, *Prog. Theor. Phys.* 117 (2007) 655.
11. M. Chernykh, H. Feldmeier, T. Neff, P. von Neumann-Cosel, A. Richter, *Phys. Rev. Lett.* 98 (2007) 032501.
12. Y. Funaki, H. Horiuchi, W. Von Oertzen, G. Roepke, P. Schuck, A. Tohsaki, T. Yamada, *Phys. Rev. C* 80 (2009) 064326.
13. E. Epelbaum, H. Krebs, T.A. Lähde, D. Lee, U.-G. Meißner, G. Rupak, *Phys. Rev. Lett.* 112 (2014) 102501.
14. R. Bijker, F. Iachello, *Phys. Rev. Lett.* 112 (2014) 152501.
15. F. Iachello and A. D. Jackson, *Phys. Lett. B* 108 (1982) 151.
16. A. Arima and F. Iachello, *Ann. Phys. (NY)* 99 (1976) 253.
17. F. Iachello and R.D. Levine, *J. Chem. Phys.* 77 (1982) 3046.
18. R. Bijker and F. Iachello, *Prog. Part. Nucl. Phys.* 110 (2020) 103735.