

مدل سازی جریان گاز در سانتریفیوژ گازی با مدل جریان خالص محوری

محمد مهدی شادمان^{۱*}، محمدرضا فرد کاشانی^۲، سید جابر صفدری^۱

۱. پژوهشکده مواد و سوخت هسته‌ای، پژوهشگاه علوم و فنون هسته‌ای، سازمان انرژی اتمی، صندوق پستی: ۸۴۸۶-۱۱۳۶۵

تهران- ایران

۲. شرکت فناوری‌های پیشرفته ایران، سازمان انرژی اتمی، صندوق پستی: ۵۹۳۱-۱۴۳۹۹۵، تهران- ایران

چکیده:

شناخت و حل معادلات حاکم بر جریان در یک سانتریفیوژ گازی، گام مهمی در طراحی و عملیات یک سانتریفیوژ غنی‌سازی می‌باشد. در مدل جریان خالص محوری برای بررسی هیدرودینامیکی سانتریفیوژ، تلاش شده تا شکلی از پروفیل سرعت محوری به دست آید که در حل مربوطه برای رسیدن به آن، نیازی به محاسبات کامپیوتری گسترده نباشد. از این رو سرعت شعاعی گاز صفر فرض می‌شود و سرعت محوری تنها تابعی از شعاع در نظر گرفته می‌شود. در این مطالعه به حل مدل جریان خالص محوری به روش هو پرداخته شده است. نتایج مدل هو نشان می‌دهد که گرادیان دمای دیواره روتور یکی از عوامل مؤثر در تشکیل جریان چرخشی درون روتور می‌باشد.

کلید واژه‌ها: غنی‌سازی، مدل جریان خالص محوری، مدل هو، شار جرمی محوری

Modeling of gas flow in gas centrifuge by purely axial model

Mohammad Mahdi Shadman^{1*}, Mohammad Reza Fardekashani², Jaber Safdari¹

1. Material and Nuclear Fuel Research School, Nuclear Science and Technology Research Institute, Atomic Energy Organization of Iran

2. Iran Advanced Technologies Company, Atomic Energy Organization of Iran

Abstract

Recognizing and solving the governing equations of flow in a gas centrifuge is an important step in the design and operation of an enrichment gas centrifuge. In the purely axial flow model to investigate the hydrodynamics of the centrifuge, an attempt has been made to obtain a shape of the axial velocity profile that does not require extensive computer calculations. Thus, the radial velocity of the gas is assumed to be zero and the axial velocity is considered to be only a function of the radius. In this study, the axial net flow model is solved by Hu method. The results of Hu model show that the temperature gradient of the rotor wall is one of the effective factors in the formation of rotational flow inside the rotor.

Keywords: Enrichment, Purely axial flow model, Hu model, axial mass flux

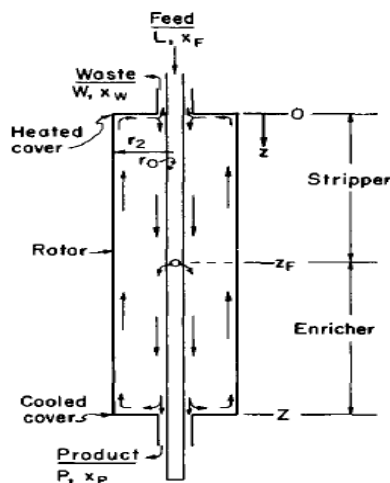
* Email: m.shadman@modares.ac.ir

۱. مقدمه:

هدف از حل معادلات جریان، محاسبه مؤلفه‌های سرعت و به دست آوردن توزیع فشار، دانسیته و دما می‌باشد و هدف از حل معادله جرم، محاسبه توزیع غلظت ایزوتوپ‌ها درون روتور سانتریفیوژ می‌باشد [۱ و ۲]. اولین روش‌های حل (دهه‌ی ۱۹۶۰ و قبل‌تر) با فرض اینکه طول روتور بسیار بیشتر از شعاع آن است، انجام شده است. در این حالت از اثرات انتهایی (مانند اثر اسکوپ و بفل و کپ) صرف‌نظر می‌شود. این روش اولین بار توسط استینبک در سال ۱۹۵۸ در آلمان و توسط پارکرو مایو در سال ۱۹۶۳ در دانشگاه ویرجینیا مورد استفاده قرار گرفت. نمونه‌ای از مدل فرضی در این روش در شکل ۱ آمده است [۳]. سابرمایر در سال ۱۹۶۱ به منظور ساده‌سازی بیشتر، به طور کامل از اثر کپ‌ها صرف‌نظر نمود و با فرض اینکه تغییرات جریان در راستای شعاع است، به حل معادلات پرداخت. اولاندر با مقایسه‌ای که بین این روش‌ها انجام داد، نشان داد که نتایج حاصل از این روش‌ها، توافق خوبی با یکدیگر دارند. باین وجود، به علت دیده نشدن کپ‌ها در این روش، جریان ایجاد شده به علت حضور اسکوپ‌ها یا اختلاف دمای بین کپ‌ها با دمای متوسط گاز و یا اثر ورود و خروج جریان، قابل محاسبه نمی‌باشد و تنها جریان ناشی از نیروی گریز از مرکز و عامل محرک گرادیان دمای دیواره، قابل محاسبه و بررسی است. در این مقاله به بررسی معادلات جریان با فرض جریان خالص محوری پرداخته می‌شود.

۲. معادلات حاکم

در شکل ۱ سانتریفیوژ گازی با جریان گردشی داخلی نشان داده شده است.



شکل ۱. سانتریفیوژ گازی با جریان گردشی داخلی [۱]

در ادامه معادلات حاکم با فرض تقارن محوری ذکر شده است.

معادله (۱) معادله پیوستگی کلی را نشان می‌دهد.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r u_r) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_z) = 0 \quad (1)$$

معادله (۲) مومنتوم در راستای شعاع، معادله (۳) مومنتوم در راستای زاویه و معادله (۴) مومنتوم در راستای ارتفاع را نشان می‌دهد.

$$\rho \left(u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_\theta^2}{r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) \right] + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right\} \quad (2)$$

$$\rho \left(u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta u_r}{r} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) = \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) \right] + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} \right\} \quad (3)$$

$$\rho \left(u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right\} + \rho g \quad (4)$$

ترکیب معادله انرژی و معادله حالت گاز ایده آل به صورت معادله (۵) ذکر می‌شود.

$$\rho C_v \left(u_r \frac{\partial T}{\partial r} + u_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_p \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] = k \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right\} \quad (5)$$

۳. حالت تعادل

در حالت تعادل که به چرخش جسم صلب یا چرخش هم‌دما معروف است، گاز مانند یک جسم صلب با مؤلفه‌های سرعت ذیل به چرخش درمی‌آید.

$$u_r = 0 \quad u_\theta = r\Omega \quad u_z = 0 \quad (6)$$

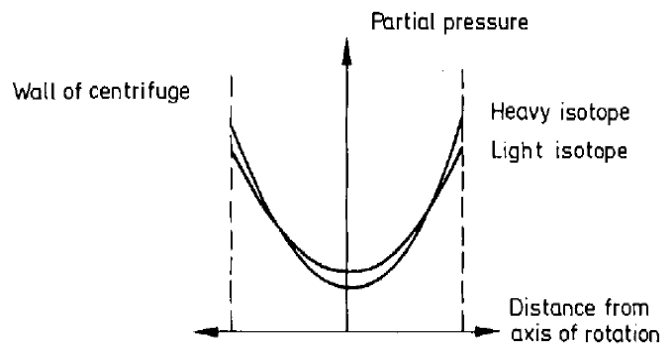
معادله مومنوم در راستای شعاع (معادله ۲) در حالت تعادلی به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\frac{\partial p_{eq}}{\partial r} = r\rho_{eq}\Omega^2 \quad (7)$$

با حل معادله فوق توزیع فشار تعادلی در راستای شعاع به دست می‌آید.

$$\frac{P(a)}{P(0)} = \exp\left(\frac{M\Omega^2 a^2}{2RT_0}\right) \quad (8)$$

در معادله (۸) فشار گاز در دیواره روتور، $P(0)$ فشار گاز در مرکز روتور و a شعاع روتور می‌باشد. با داشتن فشار نسبی در معادله (۸)، شکل ۲ برای توزیع ایزوتوپ‌های سبک و سنگین در سانتریفیوژ به دست می‌آید.



شکل ۲. توزیع مولکول‌های سبک و سنگین در سانتریفیوژ [۶]

۴. تئوری اغتشاش

انحراف از حالت تعادل به‌عنوان تئوری اغتشاش مطرح می‌شود که بسیاری از محققان با تعریف متغیرها در حالت اغتشاش و خطی سازی معادلات، تلاش‌هایی در جهت ساده‌سازی معادلات برای امکان حل تحلیلی آن‌ها نموده‌اند. هنگامی که

تعدادل سانتریفیوژ با تزریق خوراک و انتقال سیالات خروجی (به‌وسیله یکی از محرکهای داخلی یا خارجی) به هم می‌خورد، جریان مخلوط گازی درون روتور یک جریان مخالف محوری را ایجاد می‌کند. کمیت‌ها در معادلات حرکت برحسب انحراف از مقدار تعادل به‌صورت روابط (۶) و (۷) بیان می‌شوند:

$u_r = 0 + u$ $u_\theta = \Omega r + v$ $u_z = 0 + w$	(۹)
$p = p_{eq} + \bar{p}$ $\rho = \rho_{eq} + \bar{\rho}$ $T = T_0 + \bar{T}$	(۱۰)

که در این معادله متغیرهای \bar{p} ، $\bar{\rho}$ و \bar{T} متغیرهای اغتشاشی هستند که به علت در نظر گرفتن جریان چرخشی وارد معادلات می‌شوند. در نتیجه اعمال متغیرهای اغتشاشی، معادلات حاکم بر جریان به‌صورت روابط (۱۱) تا (۱۵) می‌شود. معادله پیوستگی خطی شده:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho_{eq} r u) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho_{eq} w) = 0 \quad (11)$$

معادله مومنتم شعاعی خطی شده:

$$-\bar{\rho} r \Omega^2 - 2\rho_{eq} \Omega v = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial r} + \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u) \right] + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right\} \quad (12)$$

معادله مومنتم زاویه‌ای خطی شده:

$$2\rho_{eq} \Omega u = \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v) \right] + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right\} \quad (13)$$

معادله مومنتم محوری خطی شده:

$$0 = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \mu \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right\} \quad (14)$$

معادله انرژی خطی شده:

$$-\rho_{eq} \Omega^2 r u = k \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial z^2} \right] \quad (15)$$

در حل این معادلات ترم‌های شامل حاصل‌ضرب پارامترهای اغتشاش حذف‌شده‌اند. همچنین از شتاب گرانش در جهت‌های مختلف صرف‌نظر شده است.

۵. مدل‌سازی به روش هو (۲۰۰۵)

در تحقیقی که در مرجع [۵] در سال ۲۰۰۵ انجام‌گرفته است برای حل معادلات جریان از فرض خطی‌سازی استفاده‌شده است. سرعت انحرافی u'_z به‌عنوان تابعی از شعاع به دست می‌آید. از تلفیق معادلات (۱۱) تا (۱۵)، معادله دیفرانسیل زیر به دست می‌آید.

$$\frac{d^2}{d\zeta^2} \left[\left(1 - \frac{\zeta}{A^2} \right) \frac{du'_z}{d\zeta} \right] + \frac{d}{d\zeta} \left[\left(1 - \frac{\zeta}{A^2} \right) \frac{du'_z}{d\zeta} \right] = \lambda \exp\{-\zeta\} \quad (16)$$

که در رابطه (۱۶) u'_z سرعت محوری اغتشاشی بدون بعد شده با سرعت زاویه‌ای دیواره روتور می‌باشد. در تعیین سرعت محوری بی‌بعد شده در معادله (۱۶)، از روابط (۱۷) تا (۲۰) استفاده می‌شود.

$$\zeta = A^2 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) \quad (17)$$

$$s = \frac{z}{a} \quad (18)$$

$$\lambda = \frac{R_e h}{8A^6}, \quad h = \frac{a}{T_0} \frac{dT_w}{dz} \quad (19)$$

T_w دمای دیواره روتور و a شعاع روتور می‌باشد.

$$R_e = \frac{M p_w \Omega a^2}{\mu R T_0} \quad (20)$$

شرط مرزی‌های معادله (۱۶) به صورت معادله (۲۱) تا (۲۳) می‌باشد.

$$\zeta = 0 \quad u'_z = 0 \quad (21)$$

$$\zeta = A^2 \varepsilon \quad \frac{du'_z}{d\zeta} = 0 \quad (22)$$

در رابطه (۲۲)، ζ به علت ناپایداری در حل معادله دیفرانسیل (۱۶) برابر کمی کمتر از A^2 می‌باشد که با ضریب ε در شرط مرزی لحاظ شده است ($\varepsilon \rightarrow 1$).

$$P^* = \frac{\pi \rho_w \Omega r_a^3}{A^2} \int_0^{A^2 \varepsilon} u'_z e^{-\zeta} d\zeta \quad (23)$$

در رابطه (۲۳) P^* فلاکس جریان محوری خالص گاز می‌باشد که در حالت ریفلکس کامل برابر صفر است. برای حالتی که ورود و خروج جریان به درون روتور اتفاق می‌افتد در قسمت غنی‌سازی برابر محصول و در قسمت تهی‌سازی برابر پسماند می‌باشد. با حل معادله دیفرانسیل (۱۶)، سرعت محوری بدون بعد به صورت زیر داده می‌شود.

$$u'_z = B_1 e^{-\zeta} + B_2 E_1 \left[A^2 \left(1 - \frac{\zeta}{A^2}\right) \right] + B_3 \ln \left(1 - \frac{\zeta}{A^2}\right) + B_4 \quad (24)$$

که در رابطه (۲۴) روابط زیر برقرار است.

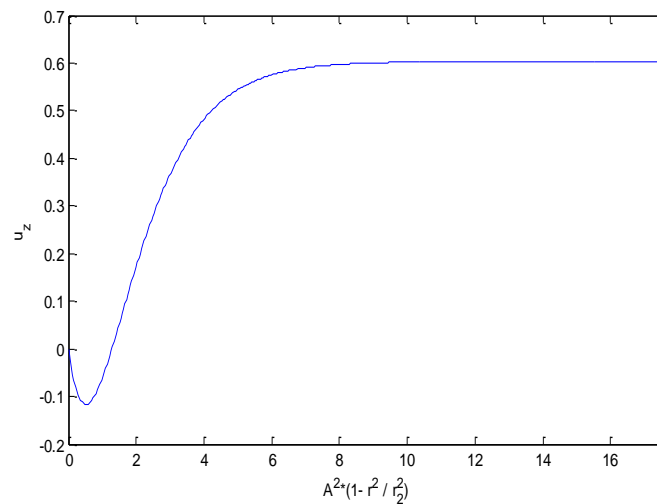
$$\begin{aligned} K_1 &= A^2 \lambda - 2A^2 \exp(A^2 \varepsilon) \lambda + \exp(2A^2 \varepsilon) (-2Q + A^2 \lambda) \\ K_2 &= -\exp(2A^2 \varepsilon) E_1(2A^2) + \exp(2A^2 \varepsilon) E_1(-2A^2(\varepsilon - 1)) + \exp(A^2(1 + \varepsilon))(1 + \varepsilon)(E_1(A^2) - E_1(-A^2(\varepsilon - 1))) + \exp(2A^2 \varepsilon) \ln(1 - \varepsilon) \\ K_3 &= -\exp(2A^2 \varepsilon) E_1(2A^2) + \exp(2A^2 \varepsilon) E_1(-2A^2(\varepsilon - 1)) + 2\exp(A^2(1 + \varepsilon))(E_1(A^2) - E_1(-A^2(\varepsilon - 1))) + \exp(2A^2) \ln(1 - \varepsilon) \\ C_2 &= (\exp(2A^2)(K_1) + (2A^4 \lambda K_2)) / (2A^2 K_3) \\ C_1 &= \exp(-A^2 \varepsilon) (A^2 \varepsilon \lambda - C_2) \\ C_3 &= A^2 (\lambda + \exp(-A^2) E_1(A^2) (C_2 - A^2 \lambda)) \\ B_1 &= -A^2 \lambda \\ B_2 &= A^2 \exp(-A^2) (A^2 \lambda - C_2) \\ B_3 &= -A^2 C_1 \\ B_4 &= C_3 \\ Q &= \frac{P^* A^2}{\pi \rho_w \Omega r_a^3} \end{aligned} \quad (25)$$

۶. بحث و نتایج

در جدول ۱ کمیت‌های ورودی مدل آورده شده است. در شکل ۳ سرعت محوری بر طبق مدل برحسب پارامتر γ در حالت برگشت کامل رسم شده است.

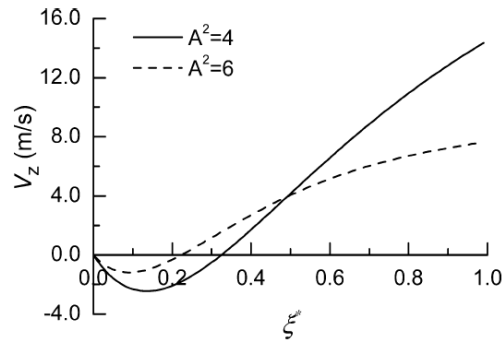
جدول ۱. مقادیر ورودی نمونه

گرادیان دمای دیواره روتور	فلاکس جریان محوری خالص گاز	شعاع روتور	ویسکوزیته گاز	فشار دیوار	جرم مولکولی	دمای گاز ورودی	سرعت محیطی
1	0	0.05 m	$1.746 \times 10^{-5} \frac{\text{kg}}{\text{m.s}}$	2666 Pa	352	300 K	$500 \frac{\text{m}}{\text{s}}$



شکل ۳. سرعت محوری معادله (۲۴) برحسب پارامتر γ در حالت برگشت کامل

در شکل ۴ نمودار سرعت محوری برحسب پارامتر از مرجع [۴] ذکر شده است که مشاهده می‌شود روند شکل ۳ و شکل ۴ یکسان است. بنابراین صحت کد توسعه یافته شده تایید می‌شود. لازم به ذکر است در صحت سنجی کدهای مربوط به مدل سازی جریان گاز روند نمودار بسیار مهم است که بیانگر جریان چرخشی شکل گرفته است.



شکل ۴. سرعت محوری معادله (۲۴) حسب پارامتر ξ در حالت برگشت کامل [۴]

۷. نتیجه‌گیری

در مدل جریان خالص محوری فرض می‌شود طول روتور در مقایسه با قطر آن خیلی بزرگ است، بنابراین میدان سرعت مستقل از ارتفاع فرض می‌شود. در این مدل معادلات ناویر استوکس، معادله پیوستگی، معادله انرژی و معادله حالت خطی سازی می‌شوند. در مدل هو گرادیان دما بر روی دیواره به‌عنوان عامل محرک و ورود و خروج جریان به‌عنوان شرط مرزی در نظر گرفته می‌شود. نتایج نشان می‌دهد بر طبق فرضیات مدل هو، جریان محوری در اثر گرادیان دمای دیواره شکل می‌گیرد که با مراجع مطابقت دارد.

۸. مراجع

- [1] D.R. Olander, "Technical basis of the gas centrifuge", vol. 6, (1972).
- [2] C. d. T. & G. Mercuriob, "Evaluation of the Berman-Olander long-bowl gas centrifuge solution," *Separation Science and Technology*, 2014.
- [3] Soubbaramayer. "Centrifugation", *Applied Physics*, vol.35, pp. 183-244, (1979).
- [4] S. Villani, *Enrichment of Uranium*, Springer-Verlag, N.Y, 1979 .
- [5] C. J. Hu, "Overall Separation Factor in a Gas Centrifuge Using a Purely Axial Flow Model", vol. 40, p. 2139-2152, (2005).