بررسی گذار فاز کوانتومی در ایزوتوپ‌های فرد باریوم با استفاده از نظریه‌ی بحران

مریم قپانوری[۱،*] ؛ مسعود صیدی[۲]

[۱]سازمان انرژی اتمی، پژوهشگاه علوم و فنون هسته ای، پژوهشکده پلاسما و گداخت هسته ای، تهران

[۲]گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه ایلام، ایلام

چکیده

در این مقاله، نقطهٔ گذار فاز برای ایزوتوپ‌های مختلف باریم ($^{127-137}Ba$) در مدل اندرکنش بوزونی فرمیونی(IBFM)، به کمک نظریهٔ بحران مشخص شده است. نظریه بحران با استفاده از حالات همدوس و معرفی مجموعه‌های دو شاخه شدگی و ماکسول، ابزار مناسبی را جهت مطالعه‌ی گذار فاز در اختیارمان قرار میدهد. در اینجا هامیلتونین ناحیه‌ی گذار از مولدهای جبر $su(1,1)$ ساخته شده است. رفتار بحرانی ایزوتوپ‌های باریوم از طریق نظریهٔ بحران تجزیه و تحلیل و سطوح انرژی از طریق فرمالیسم حالات همدوس محاسبه شده اند. نتایج، گذار فاز مرتبهٔ دومی را در این زنجیرهٔ ایزوتوپی را نشان میدهد و ^{135}Ba به عنوان بهترین کاندیدا برای تقارن بحرانی $E(5|4)$ معرفی میگردد.

کلیدواژه‌ها: نظریه بحران، حالت همدوس، مدل اندرکنش بوزون فرمیونی، سطوح انرژی

Investigation of quantum phase transition in the odd barium isotopes using Catastrophe theory

Maryam Ghapanvari[1,*], Masoud Seidi[2]

[1]Institute of Plasma and Nuclear Fusion, Institute of Nuclear Science and Technology, Tehran, Iran
[2]Department of Physics, Faculty of Science, Ilam University, Ilam, Iran

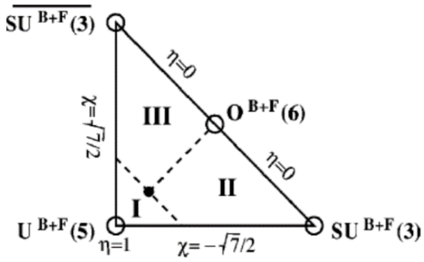
Abstract:
In this paper, the point of phase transition for different isotopes of barium ($^{127-137}Ba$) in the framework of the Interacting Boson-Fermion Model (IBFM) has determined by Catastrophe theory. The Catastrophe theory, using coherent states and introducing the bifurcation and Maxwell sets, provides a suitable tool for studying the phase transition. In here, the Hamiltonian for transitional region has made of $su(1,1)$ algebra generators. The critical behavior of barium isotopes has analyzed using Catastrophe theory and the energy surfaces have calculated by coherent states formalism. The results show that a second-order phase transition in this isotopic chain and ^{135}Ba are introduced as the best candidate for $E(5|4)$ critical symmetry.

Keywords: Catastrophe Theory, Coherent States, Interacting Boson-Fermion Model, Energy Surfaces.

Email: m.ghapanvari@tabrizu.ac.ir

۱. مقدمه

یکی از روش‌های متداول در زمینه‌ی مطالعه گذار فاز درهسته‌ها، استفاده از روش نظریه‌ی بحران می‌باشد. این نظریه تلاش دارد با درنظر گرفتن وابستگی جواب‌های معادلات به پارامترهای ظاهر شده درآنها، چگونگی تغییر کیفی جواب‌ها را بررسی کند و روش مناسبی را برای مدل‌سازی سیستم‌هایی که با تغییرات ناگهانی همراه هستند، ارائه می‌نماید. دراین روش، اولین مرحله یافتن نقاط بحرانی سطوح انرژی و تعیین مورس یا نامورس[1] بودن آنها می‌باشد. درنقاط مورس می‌توان سطوح انرژی را توسط تابع درجه دومی تقریب زد، درحالیکه در نقاط نامورس انجام چنین‌کاری امکان‌پذیر نیست و سطوح انرژی به شکل توابع بحرانی که متشکل از جرم و اختلال می‌باشند، نوشته می‌شوند. اختلال در همسایگی یک نقطه غیربحرانی تاثیری در مشخصات کمی سیستم ندارد درحالیکه درحوالی یک نقطه نامورس، اختلال ماهیت سیستم را تغییر می‌دهد. در مرحله بعدی در نقاط بحرانی نامورس ابتدا مجموعه‌ی دوشاخه‌شدگی را تعیین می‌کنیم. این مجموعه، مکان هندسی نقاط بحرانی است که دارای تبهگنی بوده و گذار از یک مینیمم نسبی به مینیمم نسبی دیگر صورت می گیرد. این شرایط از تکتایی ماتریس هسین یا ماتریس پایداری حاصل می‌شود. سه الگوی معروف برای هسته‌های زوج-زوج جمعی وجود دارند که هسته را نه در حالت حرکت تک نوکلئونی بلکه بیشتر بر حسب شکل نوکلئون‌ها، نوسانات و چرخش‌های نوکلئون‌ها توصیف می‌کنند [۱]. این سه الگو ارتعاش، چرخنده متقارن و چرخنده پاد متقارن محوری هستند. این سه الگو را می‌توان در قله مثلث تقارن کاستن شرح داد. هر کدام از این تقارن‌ها یک خصوصیت مشخص دارند و در اصل هر نوکلئون جمعی را می‌توان به منطقه‌ای در این مثلث منسوب کرد. نقاط سرتاسر مثلث مطابق با شکل‌ها و ساختارهای متفاوت هستند که می‌توانند مسیری از تغییر شکل از کروی به تغییر شکل یافته را نشان دهند. تمرکز ما بر روی مناطقی از مثلث است که در آنها چنین تغییر شکلهایی اتفاق می‌افتد. در واقع جایی که گذار فاز کوانتومی به عنوان تابعی از تعداد نوترون‌ها(N) و عدد اتمی (Z) رفتار می‌کند[۲-۱]. در هسته A فرد نیز گذار فاز کوانتومی صورت می‌پذیرد که این امر از لحاظ تجربی نیز ثابت شده است که گذار شکل برای این نوع هسته‌ها نیز اتفاق می‌افتد. گذار فاز کوانتومی در هسته A فرد نیز دارای یک مثلثی مانند مثلث کاستن است که در شکل۱ نشان داده شده است. ۴ تقارن دینامیکی بوز – فرمی در لبه‌های مثلث قرار دارد و سه منطقه متناظر با تغییرشکل‌های کروی ، کشیده و پَخت نیز در شکل ۱ نشان داده شده است. مشابه با هسته زوج – زوج برای هسته زوج –فرد و فرد – زوج نیز نقاط بحرانی $E(5)$ و $X(5)$ نیز وجود دارد اما با این تفاوت که این نقاط به شکل $E(5|\sum_j(2j+1))$ و $X(5|\sum_j(2j+1))$ که j تکانه زاویه‌ای نوکلئون منفرد است نشان داده می‌شوند[۲-۱].



شکل(۱) گذار فاز بین حدود تقارنی مثلث کامل کاستن در مدل IBFM

در این مقاله، به منظور توصیف هسته‌های گذاری با عدد جرمی فرد، از پیشنهاد پان و درایر در منابع [۳] که مبتنی بر جبر آفین $su(1,1)$ با بعد بینهایت می‌باشد استفاده می نمائیم. مفاهیم کلی جبر $su(1,1)$ در منابع [۳] به صورت گسترده ارائه شده است. در هسته‌های A فرد، تقارن های بوز-فرمی متناسب با هریک از تقارن‌های دینامیکی IBM-1 است. بنابراین، ساختار جبر بوزون، بصورت $U^B(6)$ در نظر گرفته می‌شود در حالیکه ساختار جبر فرمیونی بستگی به

[1] . Morse or non- Morse

مقادیر تکانه زاویه‌ای تک فرمیون (j) دارد. تنها دو نمونه مجزا را که فرمیونهایی در پوســـته‌های $j=1/2$ یا $3/2$ قرار می‌گیرند مورد بررسی قرار میگیرد. ما از هامیلتونین‌های گذاری که پیشتر برای توصیف هسته‌های A فرد ارائه شده است، استفاده کردیم[۴]. با معرفی حالات همدوس در این هسته‌ها سطوح انرژی را محاسبه میکنیم. سپس با معرفی نظریه‌ی بحران، به تحلیل رفتارهای بحرانی زنجیره ایزوتوپیک $^{127-137}Ba$ میپردازیم.

۲. روش کار

با استفاده از مولدهای جبرآفین $SU(1,1)$ و اپراتورهای کازیمیر زیرجبرها، هامیلتونین‌های زیر برای دو نمونه مجزا از فرمیونهایی که در پوسته‌های $j=1/2$ یا $3/2$ قرار می‌گیرند در ناحیه گذار $U^{BF}(5)-O^{BF}(6)$ در نظر می‌گیریم[۴]:

$$H = gS_0^+S_0^- + \alpha S_1^0 + \gamma \hat{C}\left(O^B(5)\right) + \delta \hat{C}\left(O^B(3)\right) + \eta \hat{C}\left(Spin^{BF}(3)\right) \quad (۱)$$

$$H = gS_0^+S_0^- + \alpha S_1^0 + \beta \hat{C}\left(Spin^{BF}(5)\right) + \gamma \hat{C}\left(Spin^{BF}(3)\right) \quad (۲)$$

پارامترهای α,β,δ و γ دارای مقادیر حقیقی هستند. در هامیلتونین‌های (۱) و (۲) با در نظرگرفتن $c_d=1$، اگر برای یک هسته مقدار $c_s=۰$ به دست آید نشان دهنده‌ی آن است که آن هسته دارای حد تقارنی $U(5)$بوده و کروی شکل می‌باشد. اما اگر $c_s=۱$ آنگاه آن هسته دارای حد تقارنی $O(6)$ بوده و بنابراین به شکل گامای ناپایدار خواهد بود[۴].

میتوانیم حد کلاسیکی هسته های A فرد را در چارچوب حالت همدوس بررسی کنیم. حد کلاسیکی معادل با هامیلتونین های (۱) و (۲) با در نظرگرفتن مقدار انتظاری آن نسبت به حالت همدوس زیر بدست می‌آید[۵]:

$$\phi = \left|N,\alpha_m\right\rangle \otimes \left|jm\right\rangle \quad (۳)$$

$$\left|N,\alpha_m\right\rangle = \left(s^+ + \sum_m \alpha_m d_m^+\right)^N \left|0\right\rangle \quad (۴)$$

کت $\left|0\right\rangle$حالت خلآ بوزونی است. پارامتر α_m را میتوان به پارامترهای تغییرشکل جمعی زیر نسبت داد:

$$\alpha_0 = \beta\cos\gamma, \alpha_{+1} = 0, \alpha_{+2} = \frac{\beta\sin\gamma}{\sqrt{2}} \quad (۵)$$

اثر عملگرهای خلق و فنای بوزونی بر روی حالت‌های همدوس به شکل زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} d\left|N,\alpha_m\right\rangle &= N\alpha_m\left|N-1,\alpha_m\right\rangle, \quad d_m^+\left|N,\alpha_m\right\rangle = \frac{1}{N+1}\frac{\partial}{\partial\alpha_m}\left|N+1,\alpha_m\right\rangle \\ s\left|N,\alpha_m\right\rangle &= N\left|N-1,\alpha_m\right\rangle, \quad s_m^+\left|N,\alpha_m\right\rangle = \left(1-\frac{1}{N+1}\alpha_m\frac{\partial}{\partial\alpha_m}\right)\left|N+1,\alpha_m\right\rangle \end{aligned} \quad (۶)$$

از رابطه‌ی زیر برای محاسبه‌ی سطح انرژی استفاده می‌کنیم:

$$E = \frac{\left\langle N,\alpha_m\right| \; H \; \left|N,\alpha_m\right\rangle}{\left\langle N,\alpha_m\right| \; N,\alpha_m\right\rangle} \quad (۷)$$

پایه برای قطری سازی قسمت فرمیونی بصورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$\left|jm\right\rangle = a_{jm}^+\left|0\right\rangle \quad (۸)$$

تصویر ممنتوم زاویه ای کلی j روی محور تقارنی، m است. بنابراین سطوح انرژی پتانسیل مقدار انتظاری هامیلتونین (۱) نسبت به حالت همدوس بصورت زیر بدست می‌آید:

$$
\begin{aligned}
E=&\frac{gN\left(N-1\right)}{4\left(1+\beta^2\right)^2}\left[c_s^2+2c_sc_d\beta^2+c_d^2\beta^4\right]+\frac{\alpha}{4}c_s^2\left(\frac{2N}{1+\beta^2}+1\right)+\frac{\alpha}{4}c_d^2\left(\frac{2N\beta^2}{1+\beta^2}+5\right)\\
&+\gamma\frac{2N\beta^2}{1+\beta^2}+\frac{3}{5}\delta\frac{N\beta^2}{1+\beta^2}+\frac{3}{5}\eta\frac{N\beta^2}{1+\beta^2}+\frac{3}{2}\eta\delta_{j,\frac{1}{2}}\left(\delta_{m,\frac{1}{2}}+\delta_{m,\frac{-1}{2}}\right)
\end{aligned}
\tag{۹}
$$

برای نمونه $j=3/2$ سطوح انرژی پتانسیل مقدار انتظاری هامیلتونین (۲) نسبت به حالت همدوس بصورت زیر بدست می‌آید:

$$
\begin{aligned}
E=&\frac{gN_B\left(N_B-1\right)}{4\left(1+\beta^2\right)^2}\left[c_s^2+2c_sc_d\beta^2+c_d^2\beta^4\right]+\frac{\alpha}{4}c_s^2\left(\frac{2N_B}{1+\beta^2}+1\right)+\frac{\alpha}{4}c_d^2\left(\frac{2N_B\beta^2}{1+\beta^2}+5\right)\\
&+\eta\left\{\frac{5N_B\beta^2}{1+\beta^2}+\left\langle\frac{3}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\middle|11\right\rangle^2\delta_{j,\frac{3}{2}}\left(\delta_{m,\frac{1}{2}}+\delta_{m,-\frac{1}{2}}\right)+\sum_{\mu}\delta_{j,\frac{3}{2}}\delta_{m,\mu}\left\langle\frac{3}{2}\mu\frac{3}{2}-\mu\middle|10\right\rangle^2\right.\\
&\left.++2\sum_{\mu,\mu'}\left(-1\right)^{\mu}\delta_{j,\frac{3}{2}}\delta_{m,\mu'}\delta_{\mu'-\mu,-\mu'}\left\langle\frac{3}{2}\mu'\frac{3}{2}\mu-\mu'\middle|3\mu\right\rangle^2\right\}\\
&+\gamma\left\{\frac{3}{5}\left(\frac{N_B\beta^2}{1+\beta^2}\right)+\left\langle\frac{3}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\middle|11\right\rangle^2\delta_{j,\frac{3}{2}}\left(\delta_{m,\frac{1}{2}}+\delta_{m,-\frac{1}{2}}\right)+\sum_{\mu}\delta_{j,\frac{3}{2}}\delta_{m,\mu}\left\langle\frac{3}{2}\mu\frac{3}{2}-\mu\middle|10\right\rangle^2\right\}
\end{aligned}
\tag{۱۰}
$$

درصورتی که فرض کنیم $v\left(x_1,x_2,\dots,x_k\right)$ باشد، برای نقاط بحرانی تبهگن داریم:

$$
\nabla v\left(x_1,x_2,\dots x_k\right)=0\ \&\ \det\left|v_{ij}\left(x_1,x_2,\dots x_k\right)\right|=o_{crit.po}
\tag{۱۰}
$$

حال نظریه ی بحران را بر هامیلتونین گذاری (۱) اعمال می‌کنیم. مطابق نظریه‌ی بحران،سطوح انرژی حول نقطه $\beta=0$ بسط سری تیلور داده می‌شود که نتیجه میشود:

$$
\begin{aligned}
E\left(\beta\right)=&\frac{1}{4}N\left(N-1\right)C_s^2+\frac{N}{2}\alpha C_s^2+\frac{1}{4}\alpha\left(C_s^2+5C_d^2\right)+\frac{3}{2}\eta\delta_{j,\frac{1}{2}}\left(\delta_{m,\frac{1}{2}}+\delta_{m,\frac{-1}{2}}\right)\\
&+\frac{1}{2}\left[N\left(N-1\right)C_s\left(C_d-C_s\right)+N\left(\alpha\left(C_d{}^2-C_s{}^2\right)+\frac{6}{5}\delta+\frac{6}{5}\eta+4\gamma\right)\right]\beta^2\\
&+\left\{\frac{3}{4}N\left(N-1\right)C_s{}^2-N\left(N-1\right)C_sC_d+\frac{1}{4}N\left(N-1\right)C_d{}^2+\frac{1}{2}N\alpha\left(C_s{}^2-C_d{}^2\right)\gamma\right.\\
&\left.-\frac{3}{5}N\delta-\frac{3}{5}N\eta-2N\gamma\right\}\beta^4+\cdots
\end{aligned}
\tag{۱۱}
$$

سپس خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
&E\left(\beta\right)=A+A'\beta^2+A''\beta^4\\
&A=\frac{1}{4}N\left(N-1\right)C_s^2+\frac{N}{2}\alpha C_s^2+\frac{1}{4}\alpha\left(C_s^2+5C_d^2\right)+\frac{3}{2}\eta\delta_{j,\frac{1}{2}}\left(\delta_{m,\frac{1}{2}}+\delta_{m,\frac{-1}{2}}\right)\\
&A'=\frac{1}{2}\left[N\left(N-1\right)C_s\left(C_d-C_s\right)+N\left(\alpha\left(C_d{}^2-C_s{}^2\right)+\frac{6}{5}\delta+\frac{6}{5}\eta+4\gamma\right)\right]\\
&A''=+\left\{\frac{3}{4}N\left(N-1\right)C_s{}^2-N\left(N-1\right)C_sC_d+\frac{1}{4}N\left(N-1\right)C_d{}^2+\frac{1}{2}N\alpha\left(C_s{}^2-C_d{}^2\right)\gamma\right.\\
&\qquad\left.-\frac{3}{5}N\delta-\frac{3}{5}N\eta-2N\gamma\right\}
\end{aligned}
\tag{۱۲}
$$

مرحله بعد تعیین مجموعه‌ی دوشاخه‌شدگی است که این مجموعه، مکان هندسی نقاطی در فضای پارامترهای کنترلی اساسی است که گذار از یک مینیمم نسبی به مینیمم نسبی دیگر در آن اتفاق می‌افتد. این مجموعه از شرط صفر شدن ماتریس پایداری به دست می‌آید. این ماتریس به صورت زیر تعریف می‌شود[۵]:

$$H_{ij}=\frac{\partial^2 E\left(x_i,x_j\right)}{\partial x_i \partial x_j}\bigg|_{x_1^c,x_0^c} \tag{۱۴}$$

آنگاه از شرایط گفته شده برای مجموعه‌ی دوشاخه گی، وبا توجه به تک متغیره بودن تابع سطح انرژی، خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2}\left[N\left(N-1\right)gc_s\left(c_d-c_s\right)+N\left(\alpha\left(c_d^2-c_s^2\right)+\frac{6}{5}\eta+\frac{6}{5}\delta+4\gamma\right)\right]=0 \tag{۱۵}$$

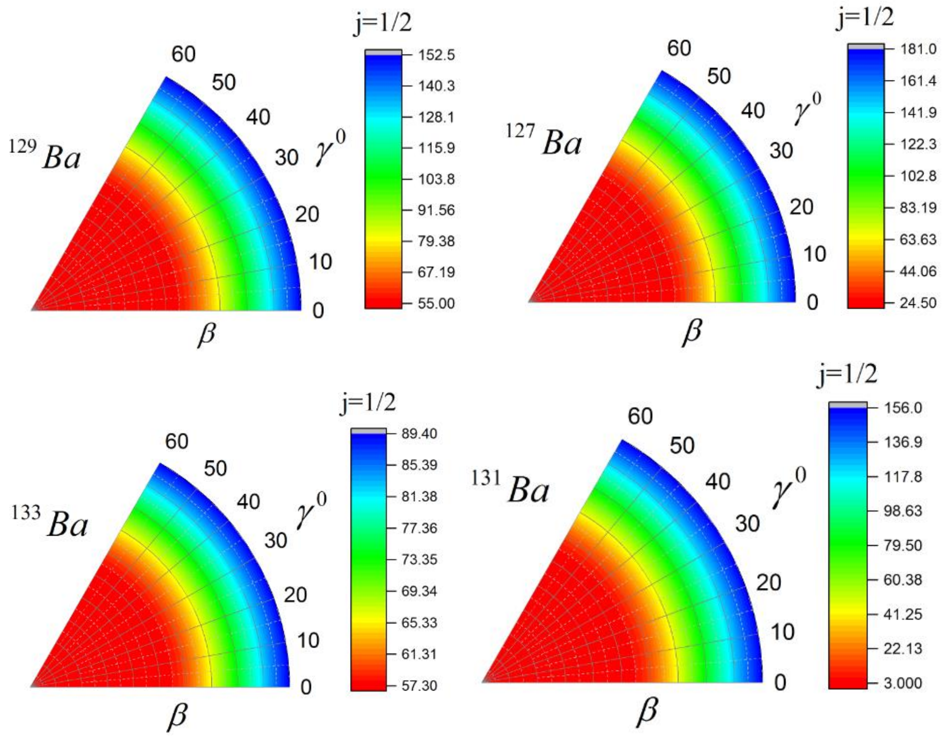
بنابراین با استفاده از رابطه‌ی فوق برای مجموعه دوشاخه گی به رابطه‌ی زیر برای تعیین c_s می‌رسیم:

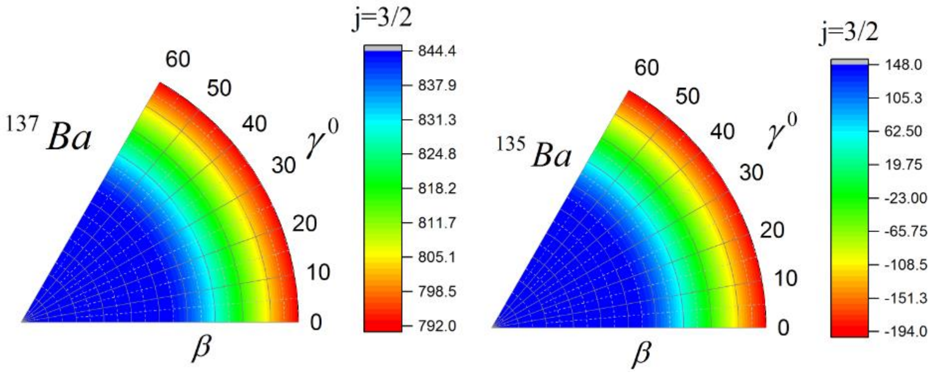
$$c_s=\frac{(N-1)c_d+\sqrt{(N-1)^2c_d^2+4(N-1+\alpha)\left(\alpha c_d^2+\frac{6}{5}\eta+\frac{6}{5}\delta+4\gamma\right)}}{2(N-1+\alpha)} \tag{۱۶}$$

۳. نتایج

بعضی از هسته ها در منطقه جرمی دارای ویژگی‌های گذار بین حدهای کروی و تغییر شکل یافته گامای ناپایدار محوری می‌باشند[۴]. مطالعات تجربی و تئوری انجام شده بر روی طیف انرژی برای ایزوتوپ‌های باریم (Ba)، ویژگی‌های گذار $U(5)\leftrightarrow O(6)$ را نشان می دهد. در این کار ما حالتهای پاریته مثبت هسته با عدد جرمی فرد $^{127-137}Ba$ با استفاده از مدل IBFM بررسی کردیم. حالتها پاریته مثبت $^{127-137}Ba$ عمدتا" بر روی مدار پوسته کروی $1g_{7/2},2d_{5/2},2d_{3/2}$ و $1s_{1/2}$ایجاد می‌شوند. به منظور بدست‌آوردن طیف انرژی و محاسبات واقعی برای این هسته‌ها، ما نیاز داریم تا پارامتر هامیلتونین‌های معادله (۱) را تعیین کنیم. پارامترها با حل معادلات بت – آنساتز با فرآیند برازش حداقل مربعات به داده‌های تجربی بدست می‌آید. ما از پارامترهای استخراج‌شده مرجع [۴] در محاسباتمان استفاده کردیم.

شکل(۱)، سطوح انرژی را برای زنجیره ایزوتوپیک $^{127-137}Ba$ بصورت تابعی از پارامتر تغییرشکل β را نشان می‌دهد. نمودار سطوح انرژی ایزوتوپ‌های باریم، در $\beta=0$ اکسترمم دارد. با توجه به شکل (۱) تغییر سطح انرژی از کمینه به بیشینه در ایزوتوپ ^{135}Ba اتفاق افتاده است. بنابراین ایزوتوپ ^{135}Ba دقیقاً نقطهٔ گذار فاز را نشان می‌دهد. سطوح انرژی ^{137}Ba در $\beta=0$ دارای قله می‌باشد که نشان‌دهنده تقارن O(6) است.





شکل۱. سطوح انرژی را برای زنجیره ایزوتوپیک $^{127-137}Ba$ بصورت تابعی از پارامتر تغییرشکل β

سطوح انرژی این قبیل از هسته ها ترکیبی از سطوح انرژی هر دو تقارن می باشد که بر حضور همزیستی شکلی دلالت میکند. پارامتر شعاعی β مقیاسی از میزان و اندازه تغییر شکل است و پارامتر زاویه ای γ انحراف از تقارن محوری را نشان می دهد. β می تواند مقادیر صفر و مثبت را به خود بگیرد. چنانچه این پارامتر برابر صفر باشد، هسته در تمامی جهات از نظر شعاعی یکسان بوده و هسته شکل کروی دارد ولی اگر مقداری مثبت و مخالف صفر داشته باشد، هسته از شکل کروی خارج شده و تغییر شکل خواهد یافت. در واقع در ناحیه گذاری بین $U(5)-O(6)$ حد $U(5)$ دارای سطح انرژی‌ای می‌باشند که یک کمینه در $\beta=0$ دارد. هرچه از حد $U(5)$ به سمت حد $O(6)$ نزدیک می‌شویم کمینه در $\beta=0$ پهن‌تر شده تا اینکه به یک کمینه مسطح $(\sim\beta^4)$ در نقطه بحرانی این ناحیه می‌رسیم. سرانجام با عبور از نقطه بحرانی، کمینه $\beta=0$ به یک بیشینه تبدیل شده و یک کمینه در $\beta\neq 0$ داریم که در حد $O(6)$ کمینه در $\beta=1$ رخ می‌دهد.

۴. بحث ونتیجه گیری

در این مقاله، به منظور توصیف هسته‌های گذاری با عدد جرمی فرد، از فرمالیسم حالات همدوس برای محاسبه سطوح انرژی استفاده شد. نحوه تغییرات سطوح انرژی برای زنجیره ایزوتوپیک $^{127-137}Ba$ بصورت تابعی از پارامتر β با استفاده از نظریه بحران بررسی شد. در تحلیل آن می‌توان گفت که، توسعه سطوح انرژی از کمینه به بیشینه دقیقاً در نقطهٔ گذار فازی شکلی صورت می‌پذیرد. برای ایزوتوپ‌های باریم این تغییر سطوح بین ^{133}Ba و ^{135}Ba رخ می‌دهد که نشان‌دهنده آن است که ایزوتوپ ^{135}Ba می‌تواند کاندیدای مناسب هسته گذاری بین حدود ارتعاشی و گامای ناپایدار باشد. همچنین سطوح انرژی ^{137}Ba در $\beta=0$ دارای قله می‌باشد که نشان‌دهنده تقارن O(6) است.

۵. مراجع

[1] Iachello, F. (2001). Analytic description of critical point nuclei in a spherical-axially deformed shape phase transition. *Physical Review Letters*, *87*(5), 052502.

[۲] Iachello, F., Van Isacker, P., & Van Isacker, P. (1991). *The interacting boson-fermion model*. Cambridge University Press.

[3] Pan, F., & Draayer, J. P. (1998). New algebraic solutions for SO(6)↔ U (5) transitional nuclei in the interacting boson model. *Nuclear Physics A*, *636*(2), 156-168.

[4] Jafarizadeh, M. A., Ghapanvari, M., & Fouladi, N. (2015). Algebraic solutions for $U^{BF}(5)-O^{BF}(6)$ quantum phase transition in odd-mass-number nuclei. *Physical Review C, 92*(5), 054306.

[5] Fathi, H., Ghadami, M., Sabri, H., Fouladi, N., & Jafarizadeh, M. A. (2014). Investigation of shape phase transition in the U(5)↔ SO (6) transitional region by catastrophe theory and critical exponents of some quantities. *International Journal of Modern Physics E*, *23*(09), 1450045.